Atténuation passive d'oscillations auto-entretenues à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type NES

Approches analytiques et numériques

Baptiste Bergeot[1]

Collaborateurs : Sergio Bellizzi[2] et Sébastien Berger[1]

[1]INSA Centre Val de Loire, LaMé (EA 7494), Blois, France

[2]Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), CNRS AMU ECM, Marseille

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

LaMé Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé

LMA Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique

Séminaire du CNAM - 12 octobre 2022

Plan

Plan

1. Introduction
2. État de l'art
3. Prédiction améliorée de la limite de fonctionnement
4. Un seul NES pour atténuer un cycle limite créé par deux modes instables
5. Conclusions et perspectives

Absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES

Absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** et amortissement linéaire :

$$\boxed{\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

Absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** et amortissement linéaire :

$$\boxed{\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

- Couplés à un système primaire (SP), ils ont la capacité :
  - d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
  - d'**absorber l'énergie du SP** de manière **irréversible** (sous conditions)

Absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** et amortissement linéaire :

$$\boxed{\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

- Couplés à un système primaire (SP), ils ont la capacité :
  - d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
  - d'**absorber l'énergie du SP** de manière **irréversible** (sous conditions)

Pompage Énergétique

(*Targeted Energy Transfer* - TET)

Absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** et amortissement linéaire :

$$\boxed{\ddot{h} + \mu \dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

- Couplés à un système primaire (SP), ils ont la capacité :
  - d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
  - d'**absorber l'énergie du SP** de manière **irréversible** (sous conditions)

Pompage Énergétique

(*Targeted Energy Transfer* - TET)

- Moyen de **contrôle passif de vibrations** de systèmes mécaniques et acoustiques :
  - Vibrations libres
  - Vibrations forcées
  - **Vibrations auto-entretenues**

Plan

Plan

Oscillations auto-entretenues : oscillateur de Van der Pol (VDP)

Oscillations auto-entretenues

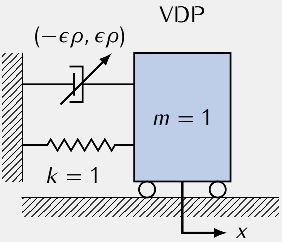
Génération et **maintien d'un mouvement périodique** (**cycle limite**) par une **source d'énergie dépourvue de toute périodicité**

Oscillations auto-entretenues : oscillateur de Van der Pol (VDP)

Oscillations auto-entretenues

Génération et **maintien d'un mouvement périodique** (cycle limite) par une **source d'énergie dépourvue de toute périodicité**

Oscillateur de Van der Pol (VDP)



$$\boxed{\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0}$$

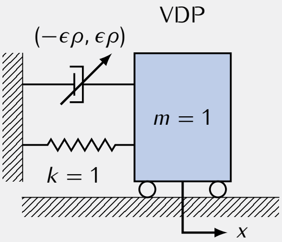
ρ : paramètre de bifurcation

Oscillations auto-entretenues : oscillateur de Van der Pol (VDP)

Oscillations auto-entretenues

Génération et **maintien d'un mouvement périodique** (cycle limite) par une **source d'énergie dépourvue de toute périodicité**

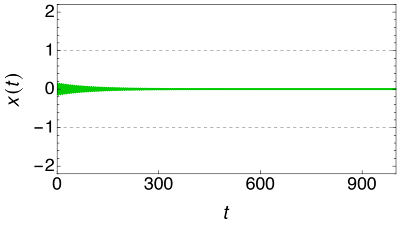
Oscillateur de Van der Pol (VDP)



$$\boxed{\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0}$$

ρ : paramètre de bifurcation

- $\boxed{\rho < 0}$: Système **stable**

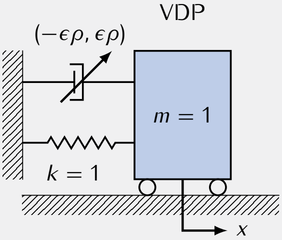


Oscillations auto-entretenues : oscillateur de Van der Pol (VDP)

Oscillations auto-entretenues

Génération et **maintien d'un mouvement périodique** (cycle limite) par une **source d'énergie dépourvue de toute périodicité**

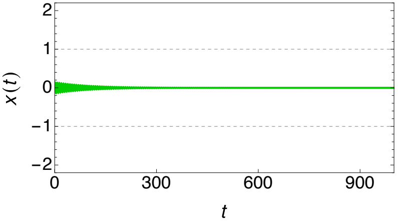
Oscillateur de Van der Pol (VDP)



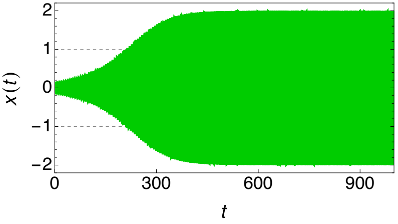
$$\boxed{\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0}$$

ρ : paramètre de bifurcation

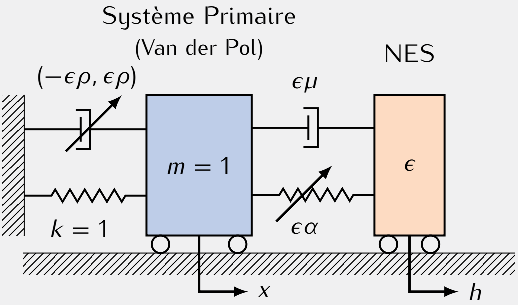
- $\boxed{\rho < 0}$: Système **stable**



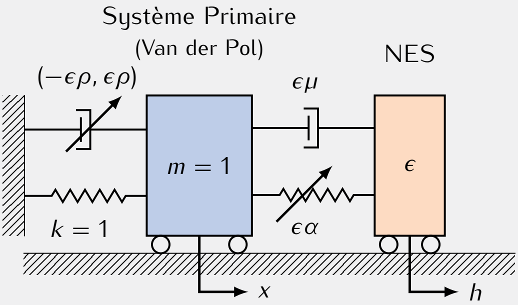
- $\boxed{\rho > 0}$: Système **instable** + Cycle Limite



Oscillateur de Van der Pol couplé à un NES



Oscillateur de Van der Pol couplé à un NES



Équations du mouvement adimensionnées

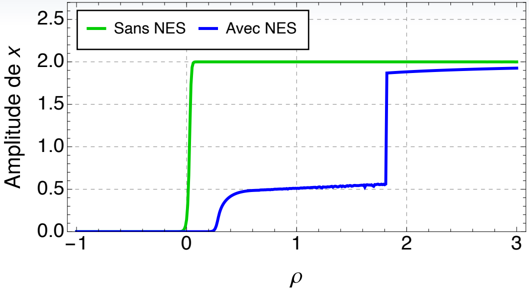
NES léger $\Rightarrow \boxed{0 < \epsilon \ll 1}$

$$\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$
$$\epsilon\ddot{h} + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$

Limite de fonctionnement du NES

Diagramme de bifurcation

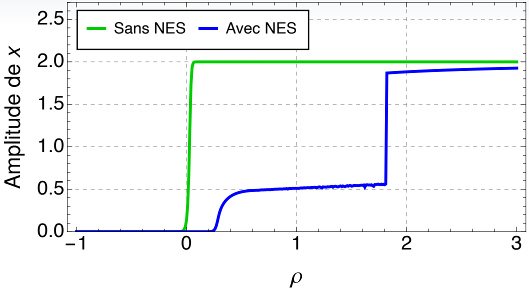
Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**

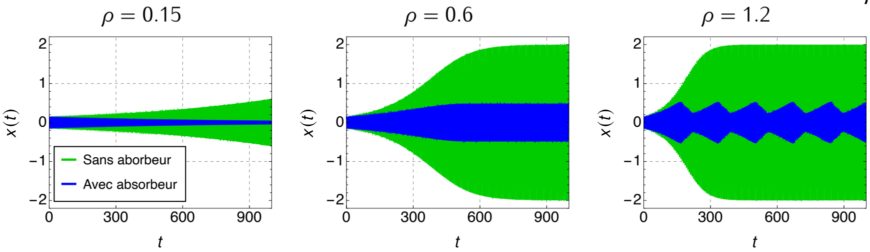


Limite de fonctionnement du NES

Diagramme de bifurcation

Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**





Stabilisation (effet **linéaire**)

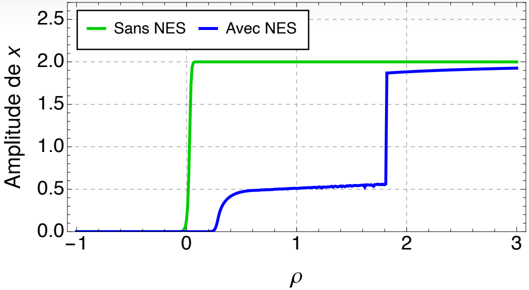
Régimes périodiques (effet **non linéaire**)

Régimes quasi-périodiques (SMR) (effet **non linéaire**)

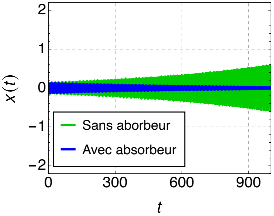
Limite de fonctionnement du NES

Diagramme de bifurcation

Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**

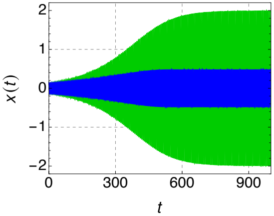


$\rho = 0.15$



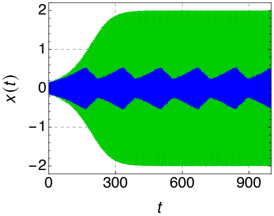
Stabilisation
(effet **linéaire**)

$\rho = 0.6$



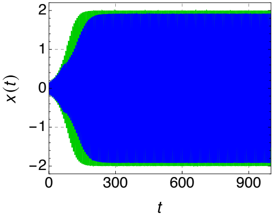
Régimes périodiques
(effet **non linéaire**)

$\rho = 1.2$



Régimes quasi-périodiques
(SMR) (effet **non linéaire**)

$\rho = 2.7$



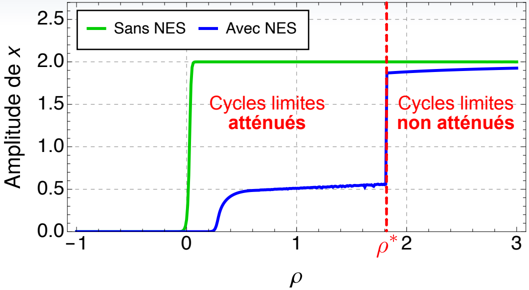
Pas d'atténuation

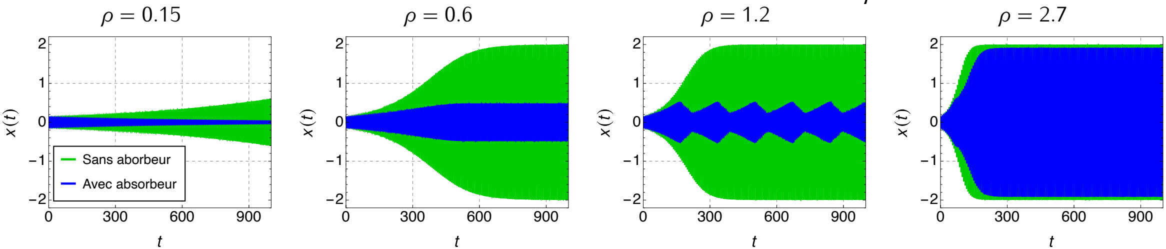
Limite de fonctionnement du NES

Diagramme de bifurcation

Amplitude du régime établi en fonction du **paramètre de bifurcation ρ**

ρ^* : **limite de fonctionnement**





Stabilisation (effet **linéaire**)

Régimes périodiques (effet **non linéaire**)

Régimes quasi-périodiques (SMR) (effet **non linéaire**)

Pas d'atténuation

Prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Articles de référence

Analyse à l'ordre 0

Prédiction théorique de la limite de fonctionnement dans le cas limite où $\boxed{\epsilon = 0}$

O. V. Gendelman et T. Bar :
Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink.
Physica D, 239(3–4):220–229, février 2010.

O. V. Gendelman, A. F. Vakakis, L. A. Bergman et D. M. McFarland :
Asymptotic analysis of passive nonlinear suppression of aeroelastic instabilities of a rigid wing in subsonic flow.
SIAM Journal on Applied Mathematics, 70(5):1655–1677, 2010.

B. Bergeot et S. Bellizzi :
Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks.
Mechanical Systems and Signal Processing, 131:728–750, 2019.

Plan

Équations de la dynamique moyennée

- Équations de mouvement en x (VDP) et h (NES)

Équations de la dynamique moyennée

- Équations de mouvement en x (VDP) et h (NES)
- Coordonnées barycentriques $\boxed{u_1 = x + \epsilon h}$ et $\boxed{u_2 = x - h}$

Équations de la dynamique moyennée

- Équations de mouvement en x (VDP) et h (NES)
- Coordonnées barycentriques $\boxed{u_1 = x + \epsilon h}$ et $\boxed{u_2 = x - h}$

$\Rightarrow$ **Hypothèse de résonance** 1 : 1

$\hookrightarrow$ **Obtention de la dynamique moyennée** (ou **flot lent**) par un méthode de **Moyennisation** :

Équations de la dynamique moyennée

- Équations de mouvement en x (VDP) et h (NES)
- Coordonnées barycentriques $\boxed{u_1 = x + \epsilon h}$ et $\boxed{u_2 = x - h}$

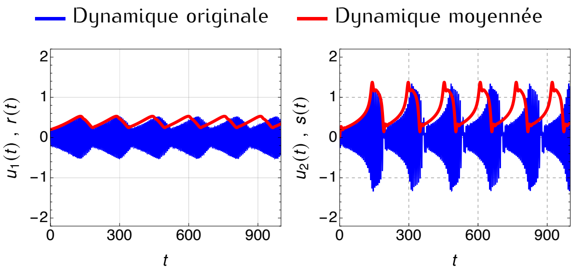
$\Rightarrow$ **Hypothèse de résonance 1 : 1**

$\hookrightarrow$ **Obtention de la dynamique moyennée** (ou **flot lent**) par un méthode de **Moyennisation** :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= \epsilon f(r, s, \Delta) \\ \dot{s} &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

r : amplitude de u_1
s : amplitude de u_2
Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

Cas d'un SMR



Équations de la dynamique moyennée

- Équations de mouvement en x (VDP) et h (NES)
- Coordonnées barycentriques $\boxed{u_1 = x + \epsilon h}$ et $\boxed{u_2 = x - h}$

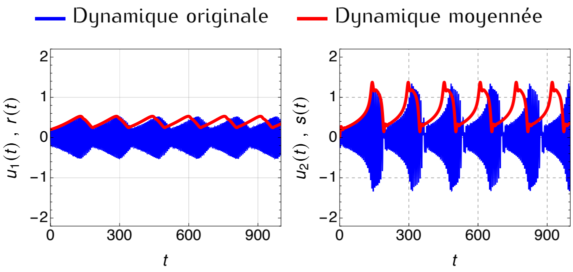
$\Rightarrow$ **Hypothèse de résonance 1 : 1**

$\hookrightarrow$ **Obtention de la dynamique moyennée** (ou **flot lent**) par un méthode de **Moyennisation** :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= \epsilon f(r, s, \Delta) \\ \dot{s} &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

r : amplitude de u_1
s : amplitude de u_2
Δ : différence de phase entre u_2 et u_1

Cas d'un SMR



Dynamique moyennée $\equiv$ système lent-rapide : **1 variable lente** r **et 2 variables rapides** s **et** Δ

$\Rightarrow$ Le profil temporel des variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Méthode des échelles de temps multiples

Dynamique moyennée ≡ Système lent-rapide

- Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Méthode des échelles de temps multiples

Dynamique moyennée ≡ Système lent-rapide

- Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps rapide** t

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \epsilon f(r, s, \Delta) \\ \dot{s} &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps lente** $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned} r' &= f\,(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1\,(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2\,(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Méthode des échelles de temps multiples

Dynamique moyennée ≡ Système lent-rapide

- Le profil temporel de ses variables possède des **phases rapides** et des **phases lentes**
- Analysé par une méthode aux **échelles de temps multiples**

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps rapide** t

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \epsilon f(r,s,\Delta)\\ \dot{s} &= \tilde{g}_1(r,s,\Delta,\epsilon)\\ \dot{\Delta} &= \tilde{g}_2(r,s,\Delta,\epsilon)\end{aligned}$$

quand $\epsilon = 0$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{r} &= 0\\ \dot{s} &= \tilde{g}_1(r,s,\Delta,0)\\ \dot{\Delta} &= \tilde{g}_2(r,s,\Delta,0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**
décrit les phases rapides

Dynamique moyennée
à l'**échelle de temps lente** $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned}r' &= f(r,s,\Delta)\\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r,s,\Delta,\epsilon)\\ \epsilon\Delta' &= \tilde{g}_2(r,s,\Delta,\epsilon)\end{aligned}$$

quand $\epsilon = 0$ on a

$$\boxed{\begin{aligned}r' &= f(r,s,\Delta)\\ 0 &= \tilde{g}_1(r,s,\Delta,0)\\ 0 &= \tilde{g}_2(r,s,\Delta,0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**
décrit les phases lentes

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

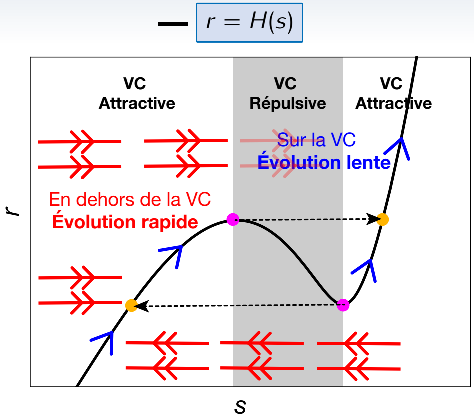
Variété critique

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \,\middle|\, \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = 0 \ , \ \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}$$

$$\boxed{r = H(s)} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta = G(s)}$$

La variété critique $\mathcal{M}_0$ est constituée d'une partie **attractive** et d'une partie **répulsive** :

- **en dehors de la VC :** évolution à l'échelle de temps rapide (sous-système rapide) vers une branche attractive de la variété critique
- **sur de la VC :** évolution à l'échelle de temps lente (sous-système lent)



Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

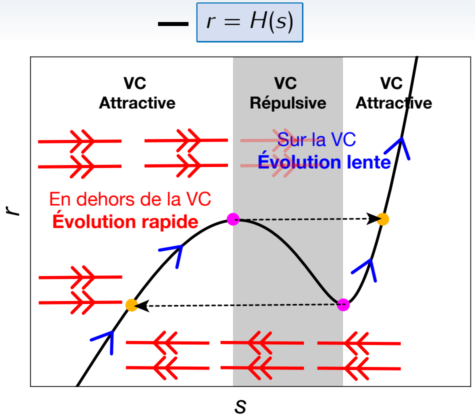
Variété critique

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ (r, s, \Delta) \,\middle|\, \tilde{g}_1(r, s, \Delta, 0) = 0 \;,\; \tilde{g}_2(r, s, \Delta, 0) = 0 \right\}$$

$\boxed{r = H(s)}$ et $\boxed{\Delta = G(s)}$

La variété critique $\mathcal{M}_0$ est constituée d'une partie **attractive** et d'une partie **répulsive** :

- **en dehors de la VC :** évolution à l'échelle de temps rapide (sous-système rapide) vers une branche attractive de la variété critique
- **sur de la VC :** évolution à l'échelle de temps lente (sous-système lent)



Points fixes

- Points fixes (PF) $\equiv$ solution de $\boxed{\dot{r} = 0,\ \dot{s} = 0,\ \dot{\Delta} = 0}$. Ils sont stables ou instables

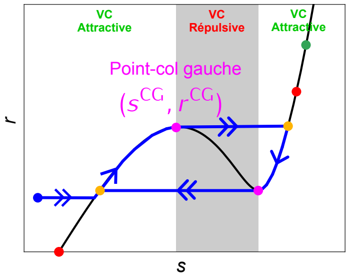
$\Rightarrow$ Analyse à l'ordre 0 : PF sur $\mathcal{M}_0 \Rightarrow \boxed{s' = F(s)} \Rightarrow$ PF solutions de $F(s) = 0$

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

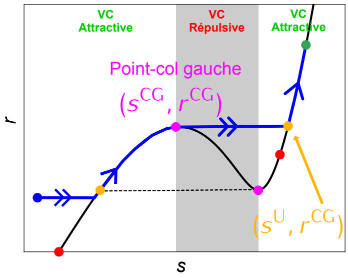
Prédiction de la limite de fonctionnement

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée

SMR



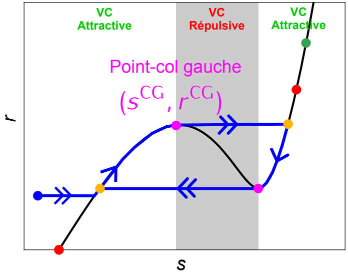
Pas d'atténuation



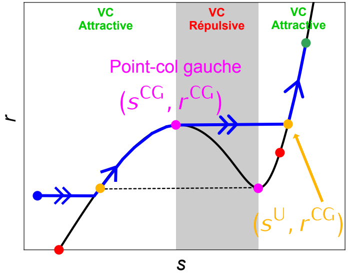
Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée
Prédiction de la limite de fonctionnement

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée

SMR



Pas d'atténuation



Estimation du point d'arrivé

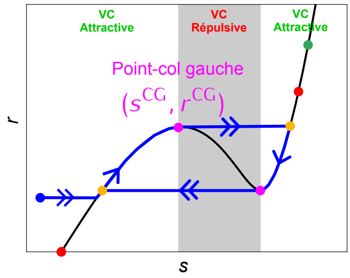
$$\boxed{(s^{\mathrm{a}}, r^{\mathrm{a}}) = (s^{\mathrm{U}}, r^{\mathrm{CG}})}$$

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

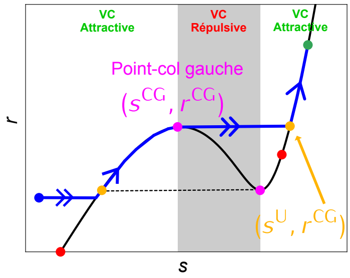
Prédiction de la limite de fonctionnement

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée

SMR



Pas d'atténuation



Estimation du point d'arrivé

$$\boxed{(s^a, r^a) = (s^U, r^{CG})}$$

Limite de fonctionnement (analyse à l'ordre 0)

Valeur du paramètre de bifurcation ρ (notée $\boxed{\rho_0^*}$) solution de :

$$\boxed{r\,[\text{plus grand point fixe instable}] = r^a = r^{CG}}$$

Plan

Plan

Résultats présentés

Limitations de la prédiction à l'ordre 0

- Analyse à l'ordre : **cas limite où** $\boxed{\epsilon = 0}$

$\Rightarrow$ Perd son pouvoir prédictif pour les « grandes » valeurs de ϵ

$\Rightarrow$ Ne décrit pas l'évolution de la limite de fonctionnement en fonction de ϵ

Résultats présentés

Limitations de la prédiction à l'ordre 0

- Analyse à l'ordre : cas limite où $\boxed{\epsilon = 0}$

$\Rightarrow$ Perd son pouvoir prédictif pour les « grandes » valeurs de ϵ

$\Rightarrow$ Ne décrit pas l'évolution de la limite de fonctionnement en fonction de ϵ

Résultats présentés (Loi d'échelle)

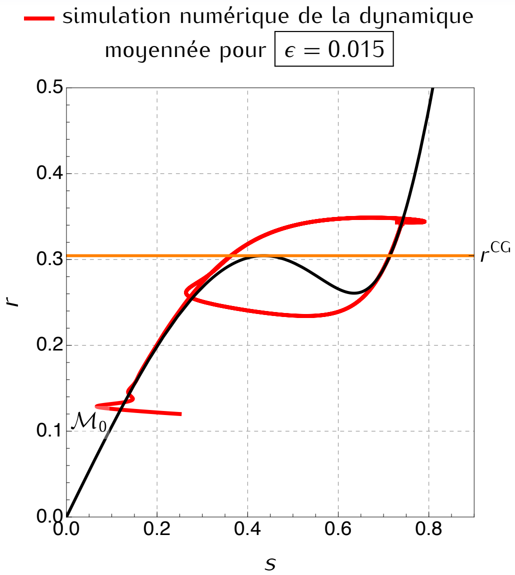
- **Loi d'échelle** de la dynamique lente au voisinage du point-col gauche de la variété critique

$\Rightarrow$ **Prédiction théorique de la limite de fonctionnement** qui prend en compte la valeur de ϵ

B. Bergeot :
Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink.
Journal of Sound and Vibration, 503:116109, 2021.

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

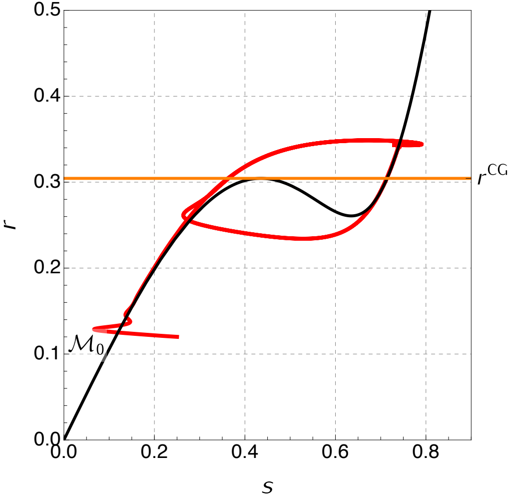
Limitations de l'analyse à l'ordre 0



Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Limitations de l'analyse à l'ordre 0

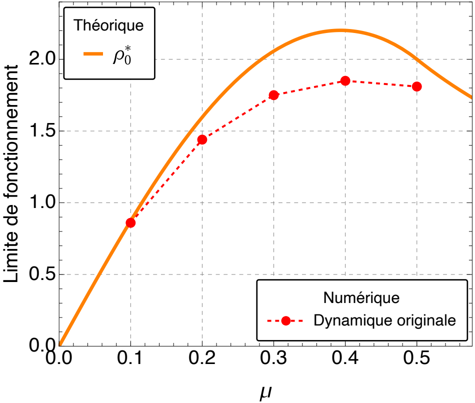
simulation numérique de la dynamique moyennée pour $\boxed{\epsilon = 0.015}$



Pour les « grandes » valeurs de ϵ :

- Sous-estimation du point d'arrivée

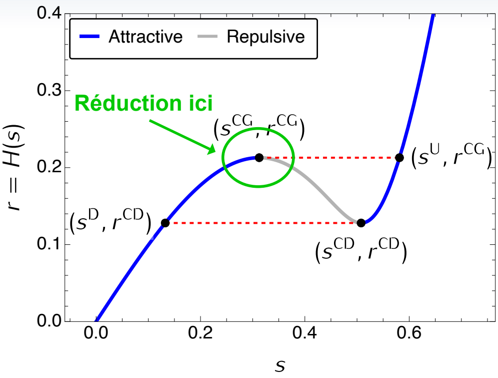
$\Rightarrow$ Sur-estimation de la limite de fonctionnement



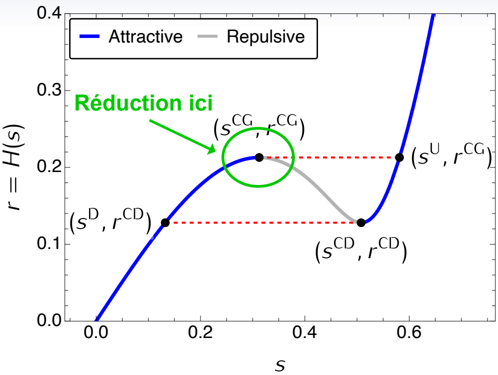
μ : coefficient d'amortissement du NES

Plan

Réduction à la variété centrale



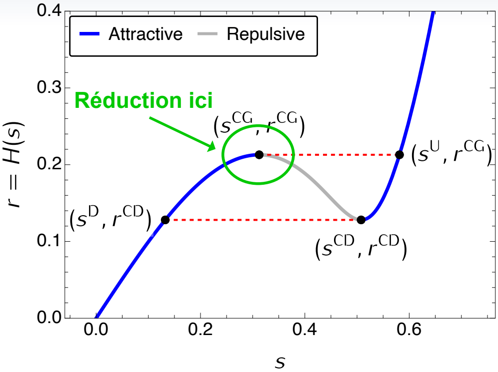
Réduction à la variété centrale



Au niveau du **point-col gauche** $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$ on réduit la dynamique moyennée

$$\boxed{\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

Réduction à la variété centrale



Au niveau du **point-col gauche** $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$ on réduit la dynamique moyennée

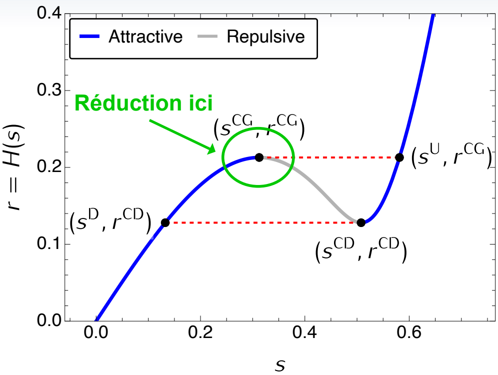
$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

$$\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q_a' &= q_a^2 + v \end{aligned}$$

v : liée à la variable lente r
q_a : liée aux variables rapides s et Δ
$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

Réduction à la variété centrale



Au niveau du **point-col gauche** $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$ on réduit la dynamique moyennée

$$\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}$$

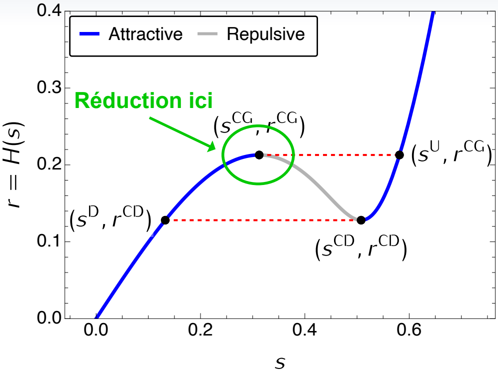
à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

$$\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q_a' &= q_a^2 + v \end{aligned}$$

v : liée à la variable lente r
q_a : liée aux variables rapides s et Δ
$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

$\Rightarrow$ **Possède une solution analytique**

Réduction à la variété centrale



Au niveau du **point-col gauche** $(r^{CG}, s^{CG}, \Delta^{CG})$ on réduit la dynamique moyennée

$$\boxed{\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ \epsilon s' &= \tilde{g}_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \tilde{g}_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

à la forme normale d'une **bifurcation col-nœud dynamique** :

$$\boxed{\begin{aligned} v' &= 1 \\ \hat{\epsilon} q_a' &= q_a^2 + v \end{aligned}}$$

v : liée à la variable lente r
q_a : liée aux variables rapides s et Δ
$\hat{\epsilon}$: lié à ϵ

$\Rightarrow$ **Possède une solution analytique**

Loi d'échelle (forme normale)

Expression analytique de **q_a en fonction v et $\hat{\epsilon}$** :

$$\boxed{q_a^{\star}(v) = \hat{\epsilon}^{1/3} \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} v\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\hat{\epsilon}^{-2/3} v\right)}}$$

Ai : function de Airy

Réduction à la variété centrale

Loi d'échelle (dynamique moyennée)

Expression analytique de s **en fonction** r :

$$\boxed{s^{\star}(r) = s^{\mathrm{CG}} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}}$$

- K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle

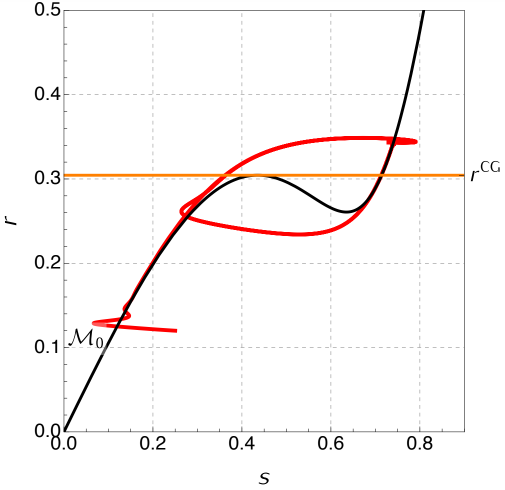
Réduction à la variété centrale

Loi d'échelle (dynamique moyennée)

Expression analytique de s **en fonction** r :

$$\boxed{s^\star(r) = s^{\mathrm{CG}} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}}$$

- K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle



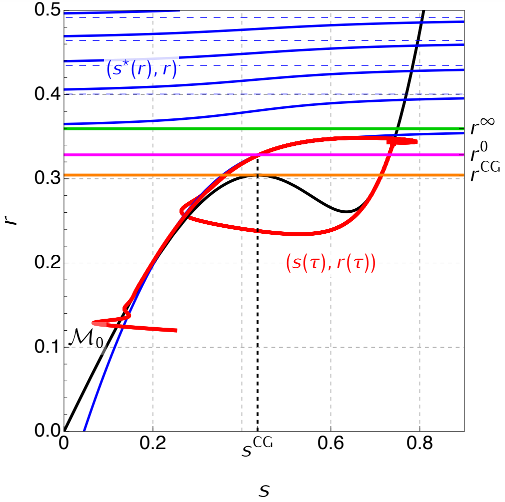
Réduction à la variété centrale

Loi d'échelle (dynamique moyennée)

Expression analytique de s **en fonction** r :

$$\boxed{s^\star(r) = s^{\mathrm{CG}} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}}$$

- K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle



Réduction à la variété centrale

Loi d'échelle (dynamique moyennée)

Expression analytique de s **en fonction** r :

$$\boxed{s^\star(r) = s^{\mathrm{CG}} + \epsilon^{1/3} K_1 \frac{\mathrm{Ai}'\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}{\mathrm{Ai}\left(-\epsilon^{-2/3} K_2 \left(r - r^{\mathrm{CG}}\right)\right)}}$$

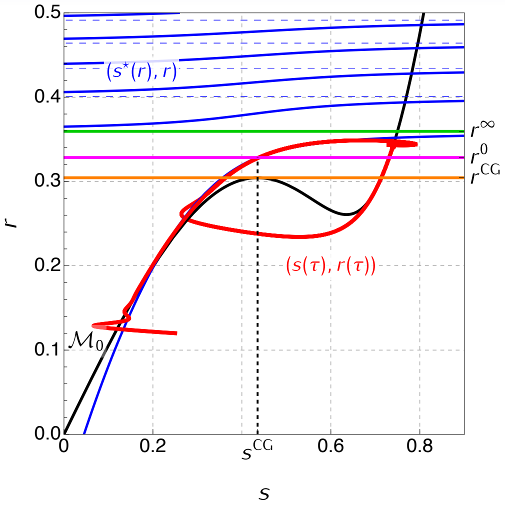
- K_1 et K_2 : constantes dépendant des paramètres du modèle

Nouvelle estimation du point d'arrivée $(s^{\mathrm{a}}, r^{\mathrm{a}})$

$$\boxed{r^0 < r^{\mathrm{a}} < r^\infty}$$

r^0 : défini tel que $s^\star(r) = s^{\mathrm{CG}}$
$\Rightarrow$ premier zéro de la dérivée de la fonction de Airy

r^∞ : défini tel que $s^\star(r) \to \infty$
$\Rightarrow$ premier zéro de la fonction de Airy



Nouvelle prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Limite de fonctionnement (analyse à l'ordre 0)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_0^*}$) solution de :

$$\boxed{r\ [\text{plus grand point fixe instable}] = r^{\mathrm{a}} = r^{\mathrm{CG}}}$$

Nouvelle prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Limite de fonctionnement (analyse à l'ordre 0)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_0^*}$) solution de :

$$\boxed{r\ [\text{plus grand point fixe instable}] = r^a = r^{CG}}$$

Limite de fonctionnement (borne inférieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\text{inf}}^*}$) solution de :

$$\boxed{r\ [\text{plus grand point fixe instable}] = r^a = r^{\infty}}$$

Limite de fonctionnement (borne supérieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\text{sup}}^*}$) solution de :

$$\boxed{r\ [\text{plus grand point fixe instable}] = r^a = r^0}$$

Nouvelle prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Limite de fonctionnement (analyse à l'ordre 0)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_0^*}$) solution de :

$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^a = r^{CG}}$$

Limite de fonctionnement (borne inférieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\mathrm{inf}}^*}$) solution de :

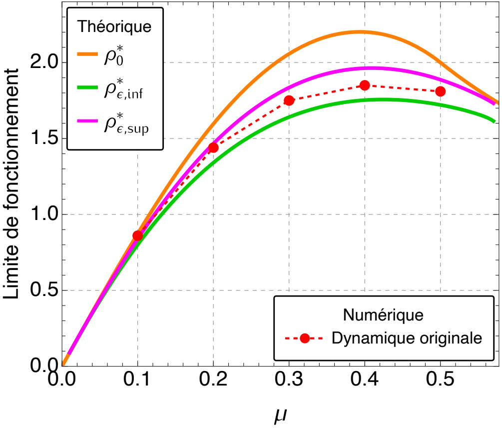
$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^a = r^{\infty}}$$

Limite de fonctionnement (borne supérieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\mathrm{sup}}^*}$) solution de :

$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^a = r^{0}}$$

En fonction de μ pour $\boxed{\epsilon = 0.015}$:



Nouvelle prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Limite de fonctionnement (analyse à l'ordre 0)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_0^*}$) solution de :

$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^{a} = r^{CG}}$$

Limite de fonctionnement (borne inférieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\text{inf}}^*}$) solution de :

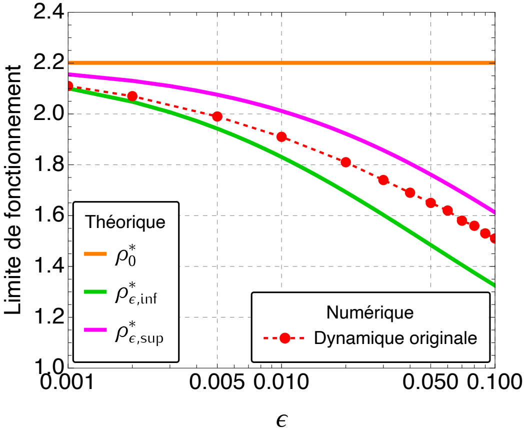
$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^{a} = r^{\infty}}$$

Limite de fonctionnement (borne supérieure)

Valeur de ρ (notée $\boxed{\rho_{\epsilon,\text{sup}}^*}$) solution de :

$$\boxed{r \text{ [plus grand point fixe instable]} = r^{a} = r^{0}}$$

En fonction de ϵ pour $\boxed{\mu = 0.4}$:



Plan

Conclusions

- **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un NES
  - Fait intervenir des **exposants fractionnaires 1/3 et 2/3 en** ϵ
  - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**

Conclusions

- **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un NES
  - Fait intervenir des **exposants fractionnaires 1/3 et 2/3 en** ϵ
  - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**
- **Généralisation** à un système primaire à plusieurs DDL ne possédant qu'**un mode instable**
  - Application à une **instabilité aéroélastique** d'aile d'avion :

B. Bergeot :
Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink.
Journal of Sound and Vibration, 503:116109, 2021.

Conclusions

- **Loi d'échelle** au niveau du point-col gauche de la dynamique moyennée d'un oscillateur auto-entretenu couplé à un NES
  - Fait intervenir des **exposants fractionnaires 1/3 et 2/3 en** ϵ
  - Permet l'**amélioration de la prédiction théorique de la limite de fonctionnement du NES**
- **Généralisation** à un système primaire à plusieurs DDL ne possédant qu'**un mode instable**
  - Application à une **instabilité aéroélastique** d'aile d'avion :

B. Bergeot :
Scaling law for the slow flow of an unstable mechanical system coupled to a nonlinear energy sink.
Journal of Sound and Vibration, 503:116109, 2021.

Perspectives

- **Optimisation des paramètres du NES** dans le but de maximiser sa limite de fonctionnement
- **Influence du bruit** sur la limite de fonctionnement **(quelques résultats en annexes)**

Plan

Plan

Résultats présentés

State of the art

The NES can be used for passive mitigation of unwanted vibrations caused by dynamics instabilities in mechanical systems with **one unstable mode** ($\equiv$ the corresponding eigenvalue has a **positive real part**)

Résultats présentés

State of the art

The NES can be used for passive mitigation of unwanted vibrations caused by dynamics instabilities in mechanical systems with **one unstable mode** (≡ the corresponding eigenvalue has a **positive real part**)

Presented work

- **Analysis** of the behavior of a N-DOFs Primary system **with two unstable modes** + 1 NES

B. Bergeot, S. Bellizzi et S. Berger :
Dynamic behavior analysis of a mechanical system with two unstable modes coupled to a single nonlinear energy sink.
Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 95:105623, 2021.

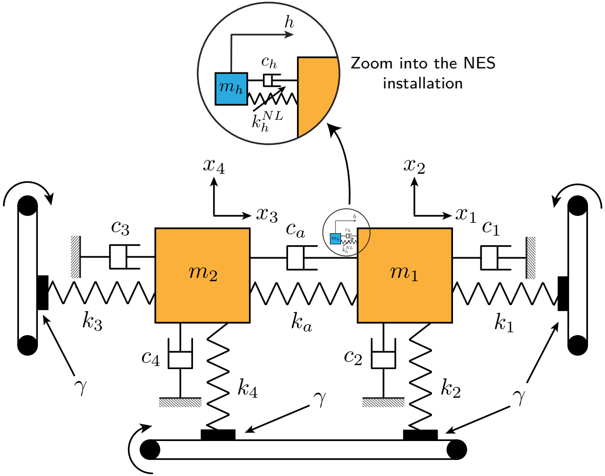
Plan

The model

Phenomenological Model of breaking system undergoing multi-instabilities

[**Denimal *et al.***, *Shock and Vibration*, 2016]

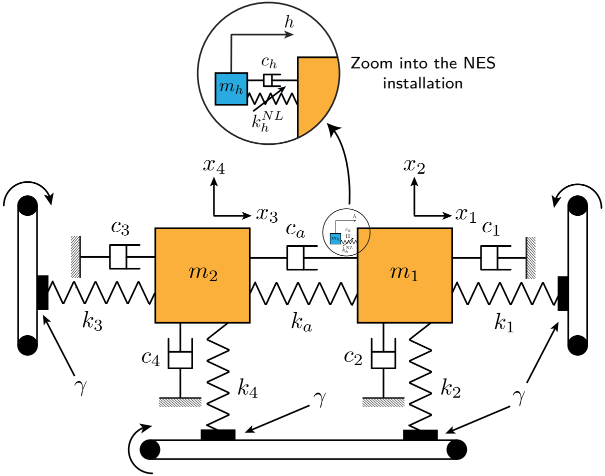
A **4-DOF friction system** with displacements x_1, x_2, x_3, x_4 coupled to **1 NES** with displacement h



The model

Phenomenological Model of breaking system undergoing multi-instabilities
[Denimal ***et al.***, *Shock and Vibration*, 2016]

A **4-DOF friction system** with displacements x_1, x_2, x_3, x_4 coupled to **1 NES** with displacement h



The 4-DOF primary system unstable system has **two unstable modes**

$\Rightarrow$ Dynamics reduction (bi-normal transformation), **keeping only the two unstable modes**

Dynamic reduction of the primary system

Bi-normal transformation

Primary system in the space-state : $\boxed{\underbrace{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, x_4, \dot{x}_4)}_{\text{state variables}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, q_3, q_3^*, q_4, q_4^*)}_{\text{bi-normal variables}}}$

- (q_1, q_1^*) and (q_2, q_2^*) correspond to the **two unstable modes** : kept
- (q_3, q_3^*) and (q_4, q_4^*) correspond to the **two stable modes** : ignored

Dynamic reduction of the primary system

Bi-normal transformation

Primary system in the space-state : $\boxed{\underbrace{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, x_4, \dot{x}_4)}_{\text{state variables}} \Rightarrow \underbrace{(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, q_3, q_3^*, q_4, q_4^*)}_{\text{bi-normal variables}}}$

- (q_1, q_1^*) and (q_2, q_2^*) correspond to the **two unstable modes** : kept
- (q_3, q_3^*) and (q_4, q_4^*) correspond to the **two stable modes** : ignored

The reduced dynamics

Assumption : mass of the NES very smaller than the mass of PS $\Rightarrow$ $\boxed{0 < \epsilon \ll 1}$

After rescaling through ϵ, the reduced dynamics takes the following form :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \lambda_1 q_1 + \epsilon f_1 (q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}, \ddot{w}) \\ \dot{q}_2 &= \lambda_2 q_2 + \epsilon f_2 (q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}, \ddot{w}) \\ g &(q_1, q_1^*, q_2, q_2^*, w, \dot{w}, \ddot{w}) = 0 \end{aligned}}$$

- λ_1 and λ_2 : eigenvalues of the two unstable modes
- $w = x_1 - h$: relative displacements between the PS and the NES

Plan

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow$ $\rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow$ $\rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

- **Assumption 1** : $1:1-1:1$ **resonance capture** between the NES and the two unstable modes
  $\Rightarrow$ **only two frequency components are retained :** ω_1 **and** ω_2

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow \rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

- **Assumption 1** : $1:1-1:1$ **resonance capture** between the NES and the two unstable modes
  $\Rightarrow$ **only two frequency components are retained :** ω_1 **and** ω_2
- **Assumption 2** : q_1 contains only the **frequency component** ω_1, q_2 contains only the **frequency component** ω_2 and **the variable** w contains only the **two frequency components** ω_1 **and** ω_2

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow$ $\rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

- **Assumption 1** : $1:1-1:1$ **resonance capture** between the NES and the two unstable modes
  $\Rightarrow$ **only two frequency components are retained :** ω_1 **and** ω_2
- **Assumption 2** : q_1 contains only the **frequency component** ω_1, q_2 contains only the **frequency component** ω_2 and **the variable** w contains only the **two frequency components** ω_1 **and** ω_2
- A **harmonic balance method** is used to obtain the slow flow

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow \rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

- **Assumption 1** : $1:1-1:1$ **resonance capture** between the NES and the two unstable modes
  $\Rightarrow$ **only two frequency components are retained :** ω_1 **and** ω_2
- **Assumption 2** : q_1 contains only the **frequency component** ω_1, q_2 contains only the **frequency component** ω_2 and **the variable** w contains only the **two frequency components** ω_1 **and** ω_2
- A **harmonic balance method** is used to obtain the slow flow

Final form of the slow flow in real domain

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}) \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \\ \dot{\boldsymbol{\Delta}} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

The slow flow is a $(4, 2)$-**fast–slow system** with :

2 slow variables :

$\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ amplitudes of q_1 and q_2

4 fast variables :

$\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ amplitudes the two frequency components of w

$\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2)^T$: phase differences

Computation of the slow flow

The eigenvalues of the unstable modes : $\boxed{\lambda_1 = \rho_1 + j\omega_1}$ and $\boxed{\lambda_2 = \rho_2 + j\omega_2}$

$\Rightarrow \rho_1 > 0$ and $\rho_2 > 0$ and ω_1 and ω_2 are incommensurable

- **Assumption 1** : 1 : 1 – 1 : 1 **resonance capture** between the NES and the two unstable modes
  $\Rightarrow$ **only two frequency components are retained :** ω_1 **and** ω_2
- **Assumption 2** : q_1 contains only the **frequency component** ω_1, q_2 contains only the **frequency component** ω_2 and **the variable** w contains only the **two frequency components** ω_1 **and** ω_2
- A **harmonic balance method** is used to obtain the slow flow

Final form of the slow flow in real domain

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}) \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \\ \dot{\boldsymbol{\Delta}} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

The slow flow is a $(4, 2)$-**fast–slow system** with :

2 slow variables :
$\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$ amplitudes of q_1 and q_2
4 fast variables :
$\mathbf{s} = (s_1, s_2)^T$ amplitudes the two frequency components of w
$\boldsymbol{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2)^T$: phase differences

The time evolution of this kind of slow-fast system is characterized by possible succession **fast epochs** and **slow epochs**.

Prediction of the steady-state regimes

The dynamic behavior of the system is investigated by means of
multiple time scales analysis of the slow flow within **the zeroth-order approximation**

Prediction of the steady-state regimes

The dynamic behavior of the system is investigated by means of
multiple time scales analysis of the slow flow within **the zeroth-order approximation**

slow flow
at the **fast time scale** t

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{r}} &= \epsilon \mathrm{f}(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta) \\ \dot{\mathrm{s}} &= \mathrm{g}_1(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta, \epsilon) \\ \dot{\Delta} &= \mathrm{g}_2(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta, \epsilon)\end{aligned}$$

slow flow
at the **slow time scale** $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned}\mathrm{r}' &= \mathrm{f}(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta) \\ \epsilon \mathrm{s}' &= \mathrm{g}_1(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta, \epsilon) \\ \epsilon \Delta' &= \mathrm{g}_2(\mathrm{r}, \mathrm{s}, \Delta, \epsilon)\end{aligned}$$

Prediction of the steady-state regimes

The dynamic behavior of the system is investigated by means of **multiple time scales analysis of the slow flow** within **the zeroth-order approximation**

slow flow
at the **fast time scale** t

$$\dot{\mathbf{r}} = \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta)$$
$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon)$$
$$\dot{\Delta} = \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon)$$

when $\epsilon = 0$ that leads to

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, 0) \\ \dot{\Delta} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **fast subsystem**

slow flow
at the **slow time scale** $\tau = \epsilon t$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta)$$
$$\epsilon \mathbf{s}' = \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon)$$
$$\epsilon \Delta' = \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon)$$

when $\epsilon = 0$ that leads to

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **slow subsystem**

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{s} &= g_1(r, s, \Delta, 0) \\ \dot{\Delta} &= g_2(r, s, \Delta, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **fast subsystem**

$$\boxed{\begin{aligned} r' &= f(r, s, \Delta) \\ 0 &= g_1(r, s, \Delta, \epsilon) \\ 0 &= g_2(r, s, \Delta, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **slow subsystem**

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0}\\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta},0)\\ \dot{\boldsymbol{\Delta}} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta},0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **fast subsystem**

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta})\\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta},\epsilon)\\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta},\epsilon)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **slow subsystem**

Critical manifold

$$\boxed{\mathcal{M}_0 := \left\{(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta}) \in \mathbb{R}^{2+2+2} \mid \mathbf{g}_1(\mathbf{s},\mathbf{r},\boldsymbol{\Delta},0) = 0,\ \mathbf{g}_2(\mathbf{r},\mathbf{s},\boldsymbol{\Delta},0) = 0\right\}}$$

$$\boxed{r_1 = H_1(s_1,s_2),\ r_2 = H_2(s_1,s_2)} \quad \text{and} \quad \boxed{\Delta_1 = G_1(s_1,s_2),\ \Delta_2 = G_2(s_1,s_2)}$$

- **Two dimensional parametric surface of** $\mathbb{R}^{2+2+2}$
- **On the critical manifold :** **slow evolution** of the slow flow described by the **slow subsystem**
- **Outside the critical manifold :** **fast evolution** of the slow flow described by the **fast subsystem**
  $\Rightarrow$ points of $\mathcal{M}_0$ are fixed points of the fast subsystem

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, 0) \\ \dot{\boldsymbol{\Delta}} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **fast subsystem**

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **slow subsystem**

Critical manifold

$$\mathcal{M}_0 := \left\{ (\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}) \in \mathbb{R}^{2+2+2} \mid \mathbf{g}_1(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\Delta}, 0) = 0, \ \mathbf{g}_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\Delta}, 0) = 0 \right\}$$

$$\boxed{r_1 = H_1(s_1, s_2), \ r_2 = H_2(s_1, s_2)} \quad \text{and} \quad \boxed{\Delta_1 = G_1(s_1, s_2), \ \Delta_2 = G_2(s_1, s_2)}$$

- Two dimensional parametric surface of $\mathbb{R}^{2+2+2}$
- **On the critical manifold :** **slow evolution** of the slow flow described by the **slow subsystem**
- **Outside the critical manifold :** **fast evolution** of the slow flow described by the **fast subsystem**
  $\Rightarrow$ points of $\mathcal{M}_0$ are fixed points of the fast subsystem

Fixed points of the slow subsystem

The fixed points of the slow flow are assumed to be **on** $\mathcal{M}_0$

Analysis of the slow subsystem (the slow dynamics)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{s},\Delta) \\ 0 &= \mathbf{g}_1(\mathbf{r},\mathbf{s},\Delta,\epsilon) \\ 0 &= \mathbf{g}_2(\mathbf{r},\mathbf{s},\Delta,\epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **slow subsystem**

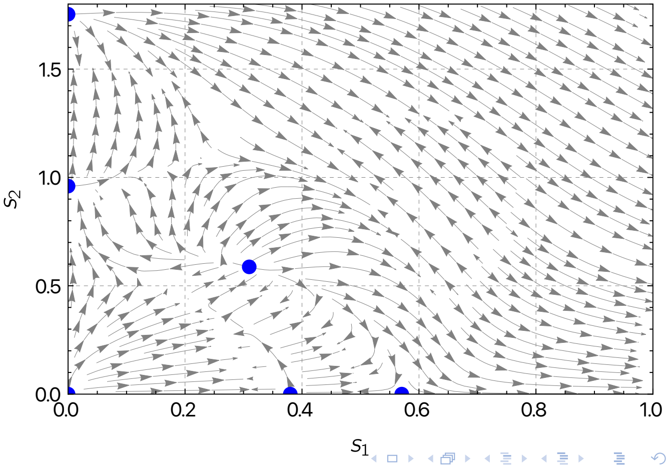
$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{s},\Delta) \Rightarrow \underbrace{\boxed{r_{1,2} = H_{1,2}(s_1,s_2)}\boxed{\Delta_{1,2} = G_{1,2}(s_1,s_2)}}_{\text{Critical manifold}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{s}' = \mathbf{F}(\mathbf{s})}$$

Fixed points of the slow flow :

$\boxed{\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}}$

- **stables** fixed points
- **unstable** fixed points

↗↙↗ stream plot of $\mathbf{F}(\mathbf{s})$



Analysis of the fast subsystem (the fast dynamics)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{r} &= 0\\ \dot{s} &= g_1\left(r, s, \Delta, 0\right)\\ \dot{\Delta} &= g_2\left(r, s, \Delta, 0\right)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ fast subsystem

To obtain the :

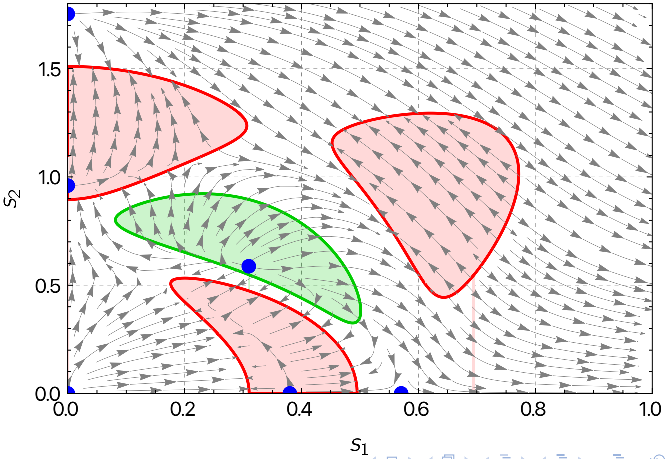
- Stability domains of the Critical Manifold
- Arrival curves

(white box) : **stable part** of the the CM

(red box) and (green box) : **unstable parts** of the the CM

The CM is **regular**
$\Rightarrow$ impossible jumps

Fold curves : the CM is **singular**
$\Rightarrow$ possible jumps



Analysis of the fast subsystem (the fast dynamics)

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{r} &= 0\\ \dot{s} &= g_1(r,s,\Delta,0)\\ \dot{\Delta} &= g_2(r,s,\Delta,0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ fast subsystem

To obtain the :

- Stability domains of the Critical Manifold
- Arrival curves

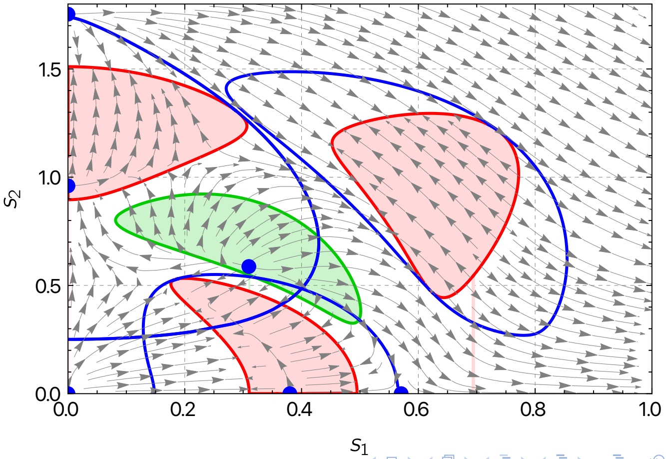
□ :
stable part of the the CM

□ and □ :
unstable parts of the the CM

— The CM is **regular**
$\Rightarrow$ impossible jumps

— Fold curves : the CM is **singular**
$\Rightarrow$ possible jumps

— Arrival curves



Plan

Review of the observed regimes

Remark

Linear Primary Structure : unstable $\equiv$ exponential growth of the amplitude (unbounded regimes)
$\Rightarrow$ **Bounded regimes observed** $\equiv$ **Mitigation regimes** (the NES acts)

Review of the observed regimes

Remark

Linear Primary Structure : unstable ≡ exponential growth of the amplitude (unbounded regimes)
⇒ **Bounded regimes observed** ≡ **Mitigation regimes** (the NES acts)

Response regimes

	One unstable mode	**Two unstable modes**
The trivial solution is reached	**Stabilization**	**Stabilization**
A non trivial fixed point of the slow flow is reached	**Mitigation through periodic regimes**	**Mitigation through (quasi-)periodic regimes**
Relaxation oscillations of the slow flow	**Mitigation through SMR** (one possible scenario)	**Mitigation through SMR** (several and more complex possible scenarios)
Exponential growth	**No mitigation**	**No mitigation**
Stable limit cycles of the slow subsystem	Not possible	Mitigation through quasi-periodic regimes

Review of the observed regimes

Remark

Linear Primary Structure : unstable ≡ exponential growth of the amplitude (unbounded regimes)
⇒ **Bounded regimes observed** ≡ **Mitigation regimes** (the NES acts)

Response regimes

	One unstable mode	**Two unstable modes**
The trivial solution is reached	**Stabilization**	**Stabilization**
A non trivial fixed point of the slow flow is reached	**Mitigation through periodic regimes**	**Mitigation through (quasi-)periodic regimes**
Relaxation oscillations of the slow flow	**Mitigation through SMR** (one possible scenario)	**Mitigation through SMR** (several and more complex possible scenarios)
Exponential growth	**No mitigation**	**No mitigation**
Stable limit cycles of the slow subsystem	Not possible	Mitigation through quasi-periodic regimes

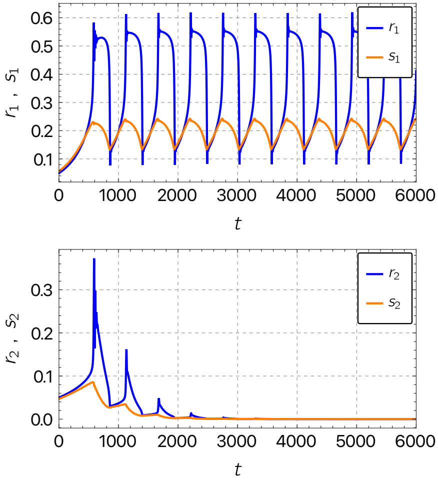
Simultaneous stable attractors (fixed points, relaxation oscillations, limit cycles)

⇒ Competition between these attractors is observed

Example

Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations (scenario 1)

First set of initial conditions : $\boxed{(s_1(0), s_2(0)) = (0.05, 0.05)}$

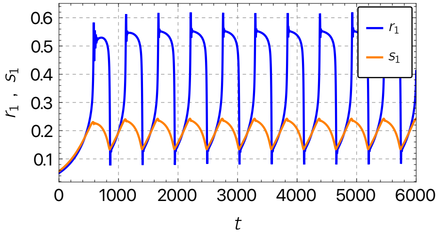


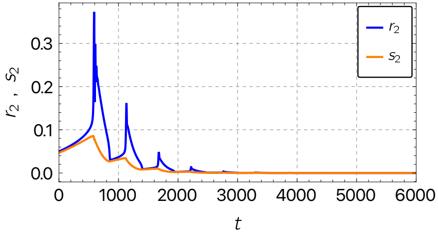
Observation : extinction of the second frequency component ($s_2 = 0$)

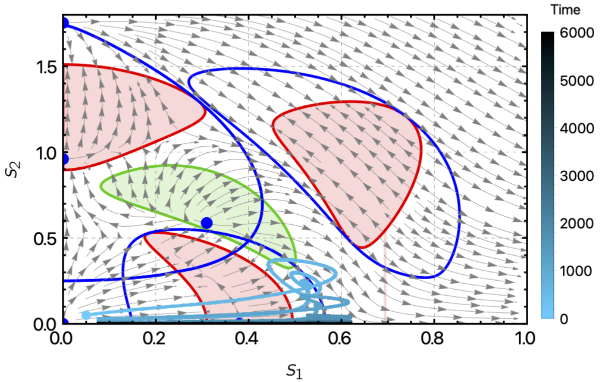
Example

Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations (scenario 1)

First set of initial conditions : $\boxed{(s_1(0), s_2(0)) = (0.05, 0.05)}$





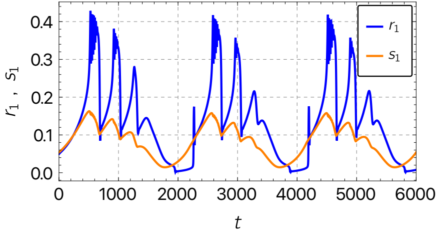


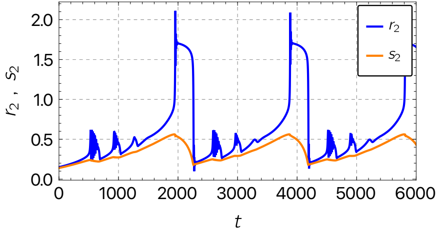
Observation : extinction of the second frequency component ($s_2 = 0$)

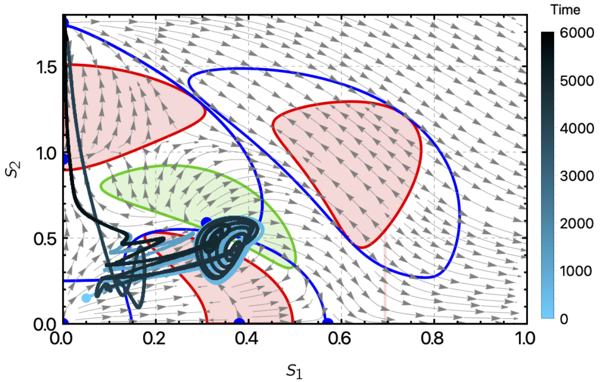
Example

Competition between two kinds of sustained relaxation oscillations (scenario 2)

Second set of initial conditions : $\boxed{(s_1(0), s_2(0)) = (0.05, 0.15)}$







Observation : oscillations of the fast dynamics (**bursting oscillations**)

Plan

Major results

Study of a linear unstable mechanical system with **2 unstable modes coupled to** 1 NES

- The single NES can produce mitigated (bounded) regimes
- **Multiple time scale analysis**

$\Rightarrow$ **Understanding of the of the steady regimes obtained by numerical simulations**

$\Rightarrow$ **2 dimensional Critical manifold** : prediction impossible without knowing the basins of attraction

Major results

Study of a linear unstable mechanical system with **2 unstable modes coupled to** 1 NES

- The single NES can produce mitigated (bounded) regimes
- **Multiple time scale analysis**

$\Rightarrow$ **Understanding of the of the steady regimes obtained by numerical simulations**

$\Rightarrow$ **2 dimensional Critical manifold** : prediction impossible without knowing the basins of attraction

Perspectives

- Global bifurcation (basins of attraction) to predict which regime will actually be reached
- More than 2 unstable modes
- Forced systems with multiple resonance

Plan

Conclusion

- 2 résultats théoriques récents permettant la prédiction et la compréhension du comportement dynamique d'un système non linéaire instable couplé à un NES

Conclusion

- 2 résultats théoriques récents permettant la prédiction et la compréhension du comportement dynamique d'un système non linéaire instable couplé à un NES

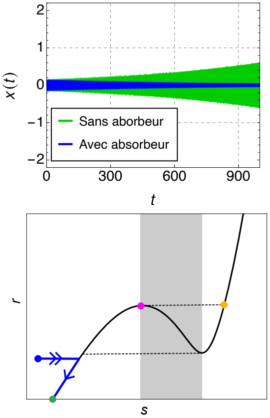
Perspectives

- NES et récupération d'énergie à l'aide de patchs piézoélectriques (partenariat LaMé et GREMAN)

Annexes

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée
Prédiction des régimes d'oscillations

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée

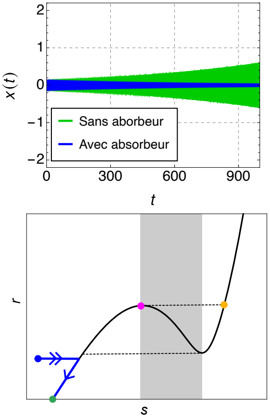


Stabilisation

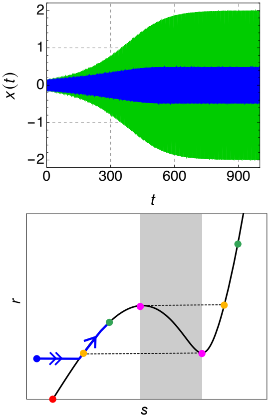
Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Prédiction des régimes d'oscillations

- Condition initiale
- Points fixes **stables**
- Points fixes **instables**
- Points-col
- Points d'arrivée



Stabilisation

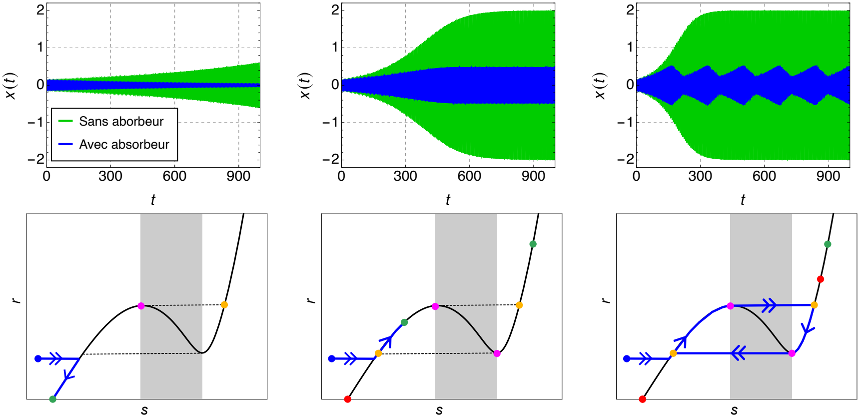


Régimes périodiques

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Prédiction des régimes d'oscillations

• Condition initiale • Points fixes **stables** • Points fixes **instables** • Points-col • Points d'arrivée



Stabilisation

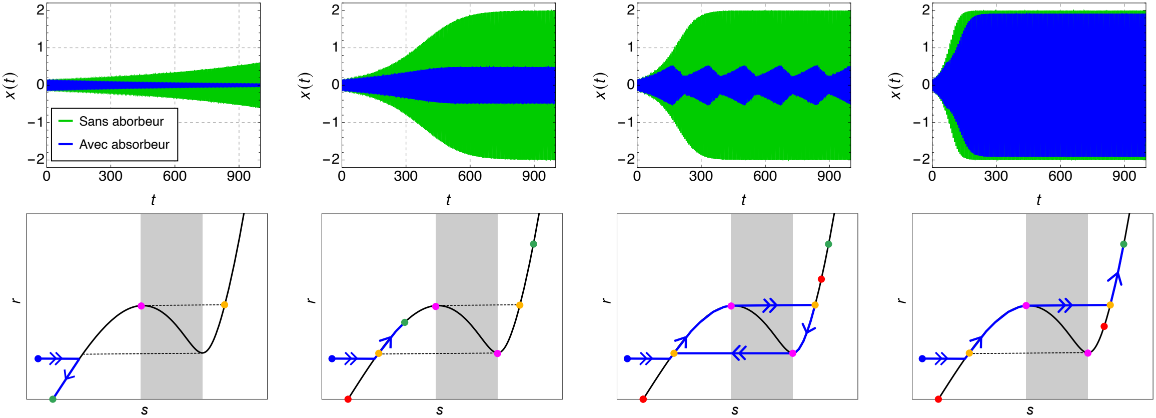
Régimes périodiques

Régimes quasi-périodiques (SMR)

Analyse à l'ordre 0 de la dynamique moyennée

Prédiction des régimes d'oscillations

● Condition initiale ● Points fixes **stables** ● Points fixes **instables** ● Points-col ● Points d'arrivée

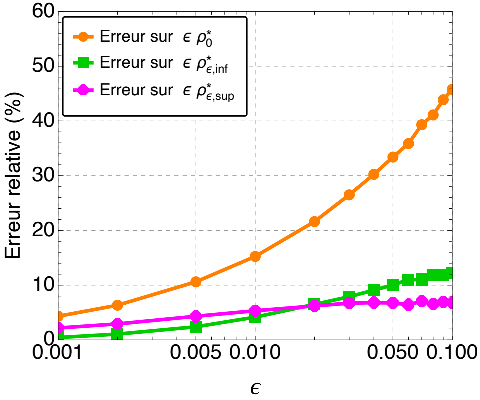


Stabilisation | Régimes périodiques | Régimes quasi-périodiques (SMR) | Pas d'atténuation

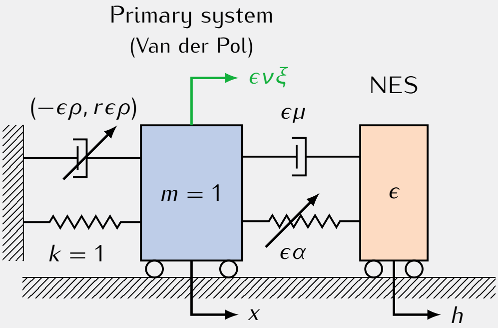
Nouvelle prédiction théorique de la limite de fonctionnement

Limite de fonctionnement « physique » : $\boxed{\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0}$

Erreur relative : $\boxed{100 \times |\epsilon\rho^*_{\text{num}} - \epsilon\rho^*_{\text{th}}|/(\epsilon\rho^*_{\text{num}})}$ avec $\rho^*_{\text{th}} = \{\rho^*_0, \rho^*_{\epsilon,\text{inf}}, \rho^*_{\epsilon,\text{sup}}\}$



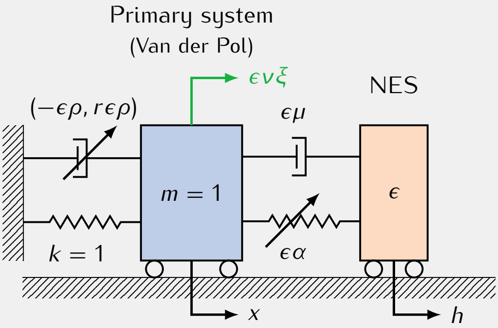
Van der Pol oscillator with stochastic forcing and coupled to an NES



$\Rightarrow$ ξ : **Gaussian white noise**

$\Rightarrow$ $\epsilon\nu$: noise level

Van der Pol oscillator with stochastic forcing and coupled to an NES



⇒ ξ : **Gaussian white noise**

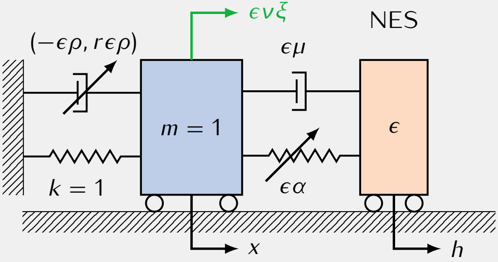
⇒ $\epsilon\nu$: noise level

Dimensionless equations of motion

NES léger ⇒ $\boxed{0 < \epsilon \ll 1}$

$$\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(rx^2 - 1\right) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = \epsilon\nu\xi(t)$$
$$\epsilon\ddot{h} + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$

Van der Pol oscillator with stochastic forcing and coupled to an NES



$\Rightarrow$ ξ : **Gaussian white noise**

$\Rightarrow$ $\epsilon\nu$: noise level

Dimensionless equations of motion

NES léger $\Rightarrow$ $\boxed{0 < \epsilon \ll 1}$

$$\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(rx^2 - 1\right) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = \epsilon\nu\xi(t)$$
$$\epsilon\ddot{h} + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 = 0$$

Stochastic slow flow dynamics

Obtained by means of the **standard stochastic averaging method**

Examples of simulations

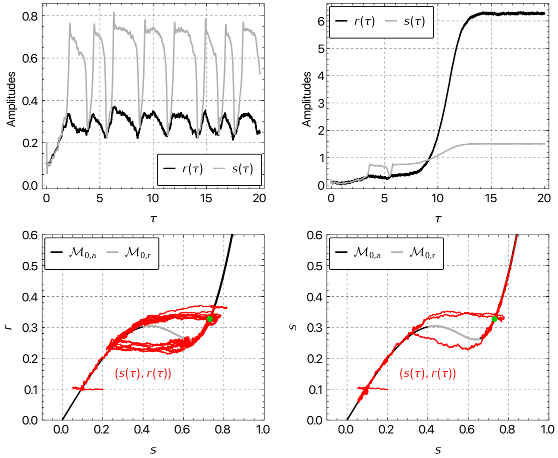
$\boxed{\rho < \rho^*}$

- Deterministic case : **SMR (mitigation)**

Examples of simulations

$$\boxed{\rho < \rho^*}$$

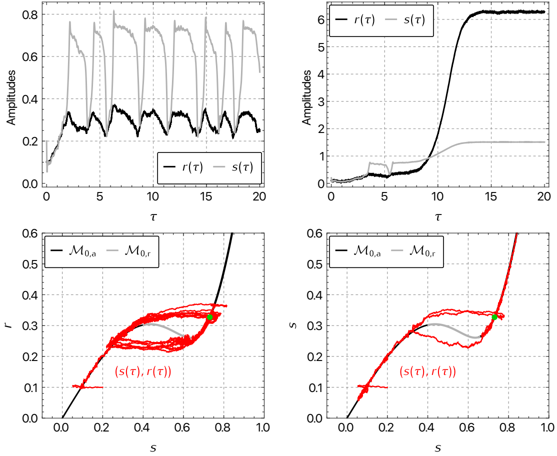
- Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- Stochastic case (example de 2 samples) :



Examples of simulations

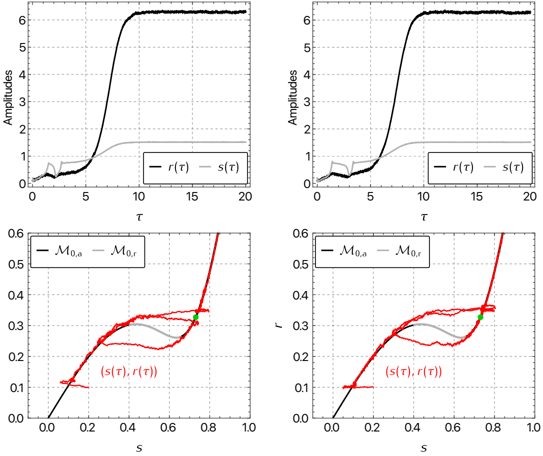
$\rho < \rho^*$

- Deterministic case : **SMR (mitigation)**
- Stochastic case (example de 2 samples) :



$\rho > \rho^*$

- Deterministic case : **no mitigation**
- Stochastic case (example de 2 samples) :



Probability of being in a mitigation regime

Definition

The **probability of being in a mitigation regime**, denoted $\boxed{p_{\mathrm{h},n}}$, is the probability for the system of being in a mitigation regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

Probability of being in a mitigation regime

Definition

The **probability of being in a mitigation regime**, denoted $\boxed{p_{\mathrm{h},n}}$, is the probability for the system of being in a mitigation regime after a given number n of full cycles of relaxation oscillations.

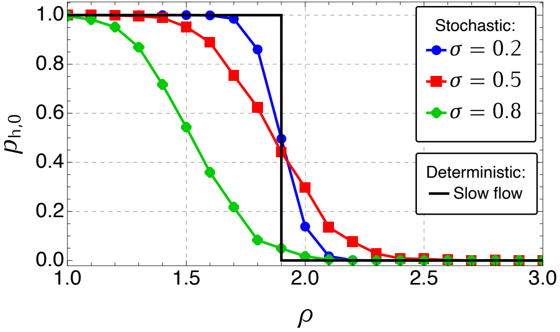


Figure – $p_{\mathrm{h},0}$ vs ρ obtained using **Monte Carlo method** with the **stochastic slow flow** (σ : noise level)