Atténuation d'instabilités vibratoires à l'aide d'absorbeurs dynamiques non linéaires de type « NES »: prédiction théorique des régimes d'oscillations

Baptiste Bergeot[a], Sergio Bellizzi[b], Bruno Cochelin[b], Sébastien Berger[b]

[a]INSA Cente Val de Loire - Laboratoire de Mécanique Gabriel Lamé (LaMé)
[b]Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA), Marseille

15 janvier 2019

Plan

Plan

1. **Introduction et résultats préliminaires**
   - Absorbeurs dynamique non linéaires de type « NES »
   - NES pour atténuer une instabilité vibratoire
   - Prédiction des régimes d'oscillation: cas d'un Van der Pol couplé à un NES
2. Systèmes instables couplés à M NESs
3. Conclusion

Plan

1. **Introduction et résultats préliminaires**
   - Absorbeurs dynamique non linéaires de type « NES »
   - NES pour atténuer une instabilité vibratoire
   - Prédiction des régimes d'oscillation: cas d'un Van der Pol couplé à un NES
2. **Systèmes instables couplés à M NESs**
   - Oscillateur de Van der Pol couplé à réseau de M NESs en parallèle
   - Système Primaire à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs
3. **Conclusion**

Absorbeurs dynamique non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** :

$$\boxed{\ddot{h} + \mu \dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

- Couplés à un système primaire (SP), ils ont la capacité :
  - $\Rightarrow$ d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
  - $\Rightarrow$ d'**absorber l'énergie du SP** de manière **irréversible** (sous conditions)

Pompage Énergétique
(*Targeted Energy Transfert* - TET)

- Moyen de contrôle passif d'**oscillations libres**, d'**oscillations forcées** et d'**instabilités vibratoires**

Absorbeurs dynamique non linéaires de type « NES »

- En anglais, *Nonlinear Energy Sink* : NES
- Oscillateurs à raideur purement non linéaire, **généralement cubique** :

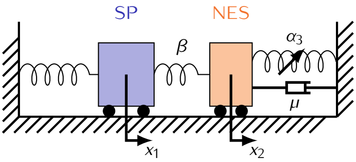
$$\boxed{\ddot{h} + \mu\dot{h} + \alpha h^3 = 0}$$

- Couplés à un système primaire (SP), ils ont la capacité :
  - ⇒ d'**adapter leur fréquence** à celle du SP (relation amplitude/fréquence)
  - ⇒ d'**absorber l'énergie du SP** de manière **irréversible** (sous conditions)

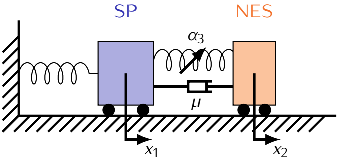
Pompage Énergétique
(*Targeted Energy Transfert* - TET)

- Moyen de contrôle passif d'**oscillations libres**, d'**oscillations forcées** et d'**instabilités vibratoires**

Configuration *"Grounded"*



Configuration *"Ungrounded"*



Plan

1. **Introduction et résultats préliminaires**
   - Absorbeurs dynamique non linéaires de type « NES »
   - NES pour atténuer une instabilité vibratoire
   - Prédiction des régimes d'oscillation: cas d'un Van der Pol couplé à un NES

2. **Systèmes instables couplés à M NESs**
   - Oscillateur de Van der Pol couplé à réseau de M NESs en parallèle
   - Système Primaire à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

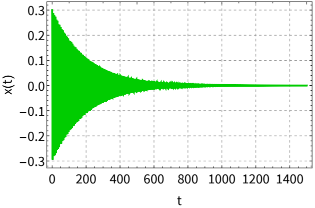
3. **Conclusion**

Oscillateur de Van der Pol

$$\boxed{\ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0}$$

ρ : paramètre de bifurcation $\qquad$ ϵ : petit paramètre

- $\boxed{\rho < 0}$: VdP stable



- $\boxed{\rho > 0}$: VdP instable + **Cycle Limite**

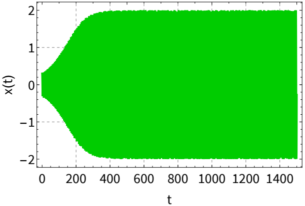
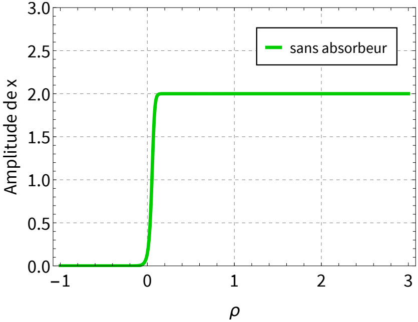


Diagramme de bifurcation

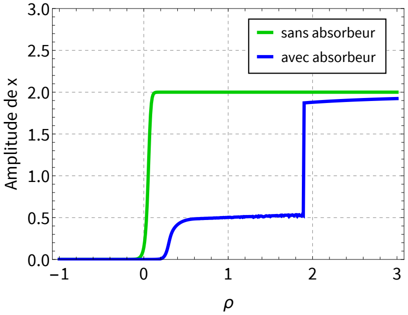
Amplitude crête à crête du régime établi en fonction du paramètre de bifurcation (ici ρ)

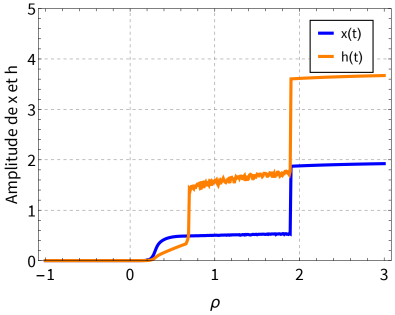


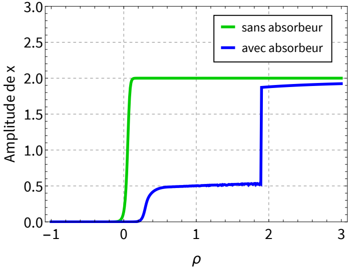
Oscillateur de Van der Pol + NES ungrounded

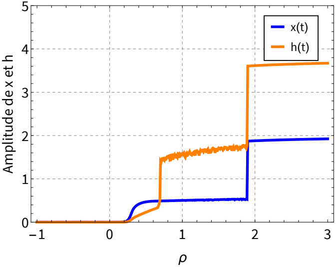
$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 &= 0 \\ \epsilon\ddot{h} - \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) - \epsilon\alpha(x - h)^3 &= 0 \end{aligned}}$$

Modification du diagramme de bifurcation

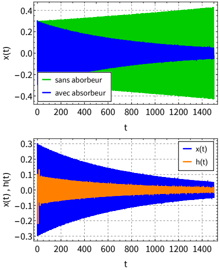






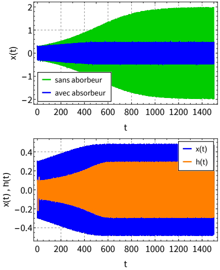


$\rho = 0.05$



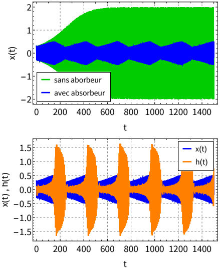
Stabilisation
(effet **linéaire**)

$\rho = 0.6$



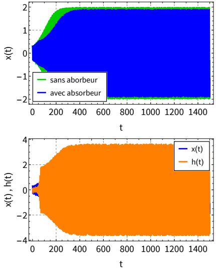
Régimes périodiques
(effet **non linéaire**)

$\rho = 1.2$



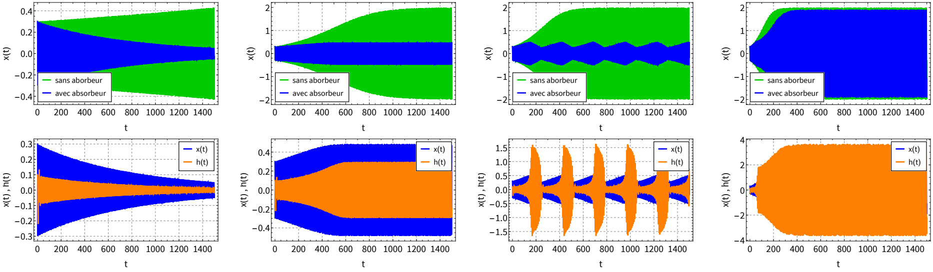
Régimes
quasi-périodiques (SMR)
(effet **non linéaire**)

$\rho = 2.7$



"Pas d'effet"

$\rho = 0.05$ | $\rho = 0.6$ | $\rho = 1.2$ | $\rho = 2.7$



Stabilisation (effet **linéaire**)

Régimes périodiques (effet **non linéaire**)

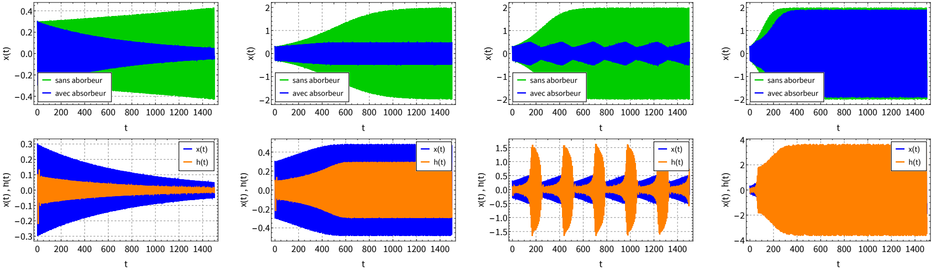
Régimes quasi-périodiques (SMR) (effet **non linéaire**)

"Pas d'effet"

Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

$\rho = 0.05$ | $\rho = 0.6$ | $\rho = 1.2$ | $\rho = 2.7$



Stabilisation (effet **linéaire**)

Régimes périodiques (effet **non linéaire**)

Régimes quasi-périodiques (SMR) (effet **non linéaire**)

"Pas d'effet"

Instabilité atténuée

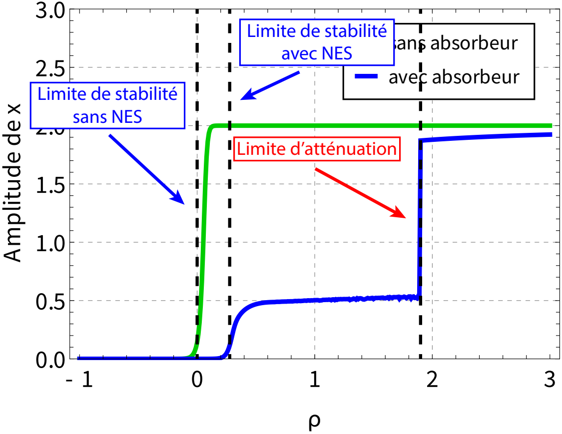
Instabilité non atténuée

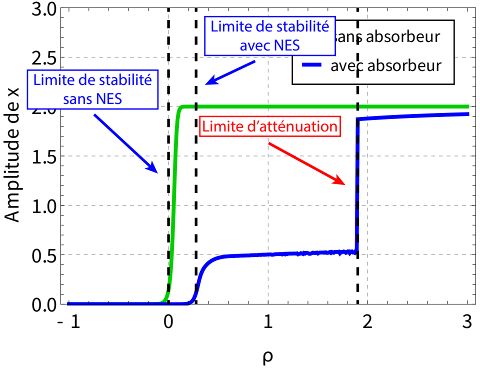
Limite d'atténuation

Valeur du paramètre de bifurcation considéré (ici ρ) qui **sépare les zones où l'instabilité est atténuée de celles où elle ne l'est pas**

Limite d'atténuation

Valeur du paramètre de bifurcation considéré (ici ρ) qui **sépare les zones où l'instabilité est atténuée de celles où elle ne l'est pas**





Objectifs du travail

- **Mettre en œuvre des techniques d'analyse** permettant la **prédiction des régimes d'oscillations** résultant du couplage entre un système primaire instable couplé à 1 ou plusieurs NESs

⇒ **Prédire la limite d'atténuation**

Plan

Prédiction des régimes d'oscillations

[**O. Gendelman et T. Bar**, "Bifurcations of self-excitation regimes in a Van der Pol oscillator with a nonlinear energy sink", *Physica D*, 2010]

⇒ Passage en coordonnées barycentriques

- Équations du mouvement et x et h :

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{x} + \epsilon\rho\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x + \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) + \epsilon\alpha(x - h)^3 &= 0 \\ \epsilon\ddot{h} - \epsilon\mu(\dot{x} - \dot{h}) - \epsilon\alpha(x - h)^3 &= 0 \end{aligned}}$$

- On passe en coordonnées barycentriques : $\boxed{u = x + \epsilon h}$ et $\boxed{v = x - h}$ + DL d'ordre 1 en $\epsilon = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{u} - \epsilon\rho\dot{u} + u + \epsilon\left(v - u\right) + \epsilon\rho u^2\dot{u} &= 0 \\ \ddot{v} + \mu\dot{v} + \alpha v^3 + \epsilon\left(\mu\dot{v} + \lambda\dot{u} + v - u + \alpha v^3\right) &= 0 \end{aligned}}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

Hypothèse de résonance 1 : 1

Les NES adapte sa fréquence à celle du système primaire

$\Downarrow$

Les deux DDLs oscillent à la pulsation propre $\omega = 1$ du système primaire

Définition

Flot lent : variations lentes par rapport aux oscillations rapides de pulsation $\omega = 1$

Étape de la méthode

1. **Calcul du flot lent** par la méthode de complexification-moyennage
2. **Analyse asymptotique du flot lent**

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

Hypothèse de résonance 1 : 1

Les NES adapte sa fréquence à celle du système primaire

$$\Downarrow$$

Les deux DDLs oscillent à la pulsation propre $\omega = 1$ du système primaire

Définition

Flot lent : variations lentes par rapport aux oscillations rapides de pulsation $\omega = 1$

Étape de la méthode

1. **Calcul du flot lent** par la méthode de complexification-moyennage
2. **Analyse asymptotique du flot lent**

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

Hypothèse de résonance 1 : 1

Les NES adapte sa fréquence à celle du système primaire

$\Downarrow$

Les deux DDLs oscillent à la pulsation propre $\omega = 1$ du système primaire

Définition

Flot lent : variations lentes par rapport aux oscillations rapides de pulsation $\omega = 1$

Étape de la méthode

1. **Calcul du flot lent** par la méthode de complexification-moyennage
2. **Analyse asymptotique du flot lent**

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

⇒ **Méthode de complexification-moyennage**

- **Complexification :**

on pose $\boxed{\psi_1 = \dot{u} + ju}$ et $\boxed{\psi_2 = \dot{v} + jv}$

puis $\boxed{\psi_1 = \phi_1 e^{jt}}$ et $\boxed{\psi_2 = \phi_2 e^{jt}}$

et enfin $\boxed{\phi_1(t) = se^{j\theta_s}}$ et $\boxed{\phi_2(t) = re^{j\theta_r}}$

↪ ϕ_1 et ϕ_2 : **amplitude complexe** (on fera l'hypothèse qu'elle varie lentement)

↪ $\boxed{e^{jt}}$: oscillation de pulsation $\omega = 1$ (rapide)

⇒ Exemple sur u pour comprendre la signification des amplitudes complexes :

$\boxed{u = \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2j} = s\sin(t + \theta_s)}$ et $\boxed{\dot{u} = \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2} = s\cos(t + \theta_s)}$

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

⇒ **Méthode de complexification-moyennage**

- **Complexification :**

on pose $\boxed{\psi_1 = \dot{u} + ju}$ et $\boxed{\psi_2 = \dot{v} + jv}$

puis $\boxed{\psi_1 = \phi_1 e^{jt}}$ et $\boxed{\psi_2 = \phi_2 e^{jt}}$

et enfin $\boxed{\phi_1(t) = se^{j\theta_s}}$ et $\boxed{\phi_2(t) = re^{j\theta_r}}$

↪ ϕ_1 et ϕ_2 : **amplitude complexe** (on fera l'hypothèse qu'elle varie lentement)

↪ $\boxed{e^{jt}}$: oscillation de pulsation $\omega = 1$ (rapide)

⇒ **Exemple sur u pour comprendre la signification des amplitudes complexes :**

$$\boxed{u = \frac{\psi_1 - \psi_1^*}{2j} = s\sin(t + \theta_s)} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{u} = \frac{\psi_1 + \psi_1^*}{2} = s\cos(t + \theta_s)}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

- **Moyennage :** ($\approx$ équilibrage harmonique)
  - $\hookrightarrow$ On écrit les équations en fonctions des amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2
  - $\hookrightarrow$ On équilibre les termes en e^{njt} et e^{-njt} ($n = 1, 2, 3$)
  - $\hookrightarrow$ **Hypothèse de résonance** 1 : 1 $\Rightarrow$ on ne garde que les termes oscillant à la pulsation $\omega = 1$, c-à-d les termes en facteur de e^{jt}

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

- **Moyennage :** ($\approx$ équilibrage harmonique)
  - $\hookrightarrow$ On écrit les équations en fonctions des amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2
  - $\hookrightarrow$ On équilibre les termes en e^{njt} et e^{-njt} ($n = 1, 2, 3$)
  - $\hookrightarrow$ Hypothèse de résonance 1 : 1 $\Rightarrow$ on ne garde que les termes oscillant à la pulsation $\omega = 1$, c-à-d les termes en facteur de e^{jt}

Expression finale du flot lent en variable réelle

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, r, \theta) \\ \dot{r} &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ \dot{\theta} &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi_1 = s e^{j\theta_s}}$, $\boxed{\phi_2 = r e^{j\theta_r}}$ et $\boxed{\theta = \theta_s - \theta_r}$

Prédiction des régimes d'oscillations - Calcul du flot lent

- **Moyennage :** ($\approx$ équilibrage harmonique)
  - $\hookrightarrow$ On écrit les équations en fonctions des amplitudes complexes ϕ_1 et ϕ_2
  - $\hookrightarrow$ On équilibre les termes en e^{njt} et e^{-njt} ($n = 1, 2, 3$)
  - $\hookrightarrow$ **Hypothèse de résonance 1 : 1** $\Rightarrow$ on ne garde que les termes oscillant à la pulsation $\omega = 1$, c-à-d les termes en facteur de e^{jt}

Expression finale du flot lent en variable réelle

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, r, \theta) \\ \dot{r} &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ \dot{\theta} &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi_1 = s e^{j\theta_s}}$, $\boxed{\phi_2 = r e^{j\theta_r}}$ et $\boxed{\theta = \theta_s - \theta_r}$

Le flot lent est un système lent-rapide avec
1 variable lente s et **2 variables rapides** r **et** θ

$\Rightarrow$ Évolution dans le temps du flot lent présente des **phases rapides** et des **phases lentes**

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Analyse asymptotique

- Méthode des échelles multiples [A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, 2008]
- **Approche géométrique de la théorie des perturbations singulières**
  [C.K.R.T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, 1995]

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Analyse asymptotique

- Méthode des échelles multiples [A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, 2008]
- Approche géométrique de la théorie des perturbations singulières [C.K.R.T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, 1995]

Flot lent écrit à l'**échelle de temps rapide t**

$$\dot{s} = \epsilon f(s, r, \theta)$$
$$\dot{r} = g_1(s, r, \theta, \epsilon)$$
$$\dot{\theta} = g_2(s, r, \theta, \epsilon)$$

Flot lent écrit à l'**échelle de temps lente $\tau = \epsilon t$**

$$s' = f(s, r, \theta)$$
$$\epsilon r' = g_1(s, r, \theta, \epsilon)$$
$$\epsilon \theta' = g_2(s, r, \theta, \epsilon)$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Analyse asymptotique

- Méthode des échelles multiples [A. Nayfeh, *Perturbation Methods*, 2008]
- Approche géométrique de la théorie des perturbations singulières
[C.K.R.T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, 1995]

Flot lent écrit
à l'**échelle de temps rapide** t

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, r, \theta) \\ \dot{r} &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ \dot{\theta} &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}$$

quand $\epsilon = 0$ cela devient

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= 0 \\ \dot{r} &= g_1(s, r, \theta, 0) \\ \dot{\theta} &= g_2(s, r, \theta, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

Flot lent écrit
à l'**échelle de temps lente** $\tau = \epsilon t$

$$\begin{aligned} s' &= f(s, r, \theta) \\ \epsilon r' &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ \epsilon\theta' &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}$$

quand $\epsilon = 0$ cela devient

$$\boxed{\begin{aligned} s' &= f(s, r, \theta) \\ 0 &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ 0 &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{s} &= 0\\ \dot{r} &= g_1(s,r,\theta,0)\\ \dot{\theta} &= g_2(s,r,\theta,0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

$$\boxed{\begin{aligned}s' &= f(s,r,\theta)\\ 0 &= g_1(s,r,\theta,\epsilon)\\ 0 &= g_2(s,r,\theta,\epsilon)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{(s,r,\theta)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; g_1(s,r,\theta,0)=0 \text{ and } g_2(s,r,\theta,0)=0\right\}}$$

- Sous-espace de $\mathbb{R}^3$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

Expression de la variété critique S :

$$\begin{aligned}g_1(s,r,\theta,0) &= 0\\ g_2(s,r,\theta,0) &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}s^2 &= H(r) = r^2\left(\mu^2+\left(1-\frac{3\alpha r^2}{4}\right)\right)\\ \tan\theta &= G(r)\end{aligned}}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{s} &= 0\\ \dot{r} &= g_1(s,r,\theta,0)\\ \dot{\theta} &= g_2(s,r,\theta,0)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

$$\boxed{\begin{aligned}s' &= f(s,r,\theta)\\ 0 &= g_1(s,r,\theta,\epsilon)\\ 0 &= g_2(s,r,\theta,\epsilon)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{(s,r,\theta)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; g_1(s,r,\theta,0)=0 \text{ and } g_2(s,r,\theta,0)=0\right\}}$$

- Sous-espace de $\mathbb{R}^3$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

Expression de la variété critique S :

$$g_1(s,r,\theta,0)=0$$
$$g_2(s,r,\theta,0)=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}s^2 &= H(r) = r^2\left(\mu^2+\left(1-\frac{3\alpha r^2}{4}\right)\right)\\ \tan\theta &= G(r)\end{aligned}}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= 0 \\ \dot{r} &= g_1(s,r,\theta,0) \\ \dot{\theta} &= g_2(s,r,\theta,0) \end{aligned}}$$

↪ **sous-système rapide**

$$\boxed{\begin{aligned} s' &= f(s,r,\theta) \\ 0 &= g_1(s,r,\theta,\epsilon) \\ 0 &= g_2(s,r,\theta,\epsilon) \end{aligned}}$$

↪ **sous-système lent**

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{ (s,r,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid g_1(s,r,\theta,0) = 0 \text{ and } g_2(s,r,\theta,0) = 0 \right\}}$$

- Sous-espace de $\mathbb{R}^3$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

Expression de la variété critique S :

$$\begin{aligned} g_1(s,r,\theta,0) &= 0 \\ g_2(s,r,\theta,0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s^2 &= H(r) = r^2\left(\mu^2 + \left(1 - \frac{3\alpha r^2}{4}\right)\right) \\ \tan\theta &= G(r) \end{aligned}}$$

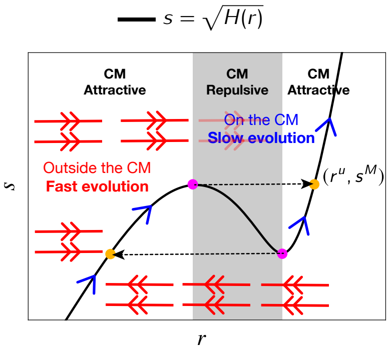
Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 0 \\ \dot{r} &= g_1(s,r,\theta,0) \\ \dot{\theta} &= g_2(s,r,\theta,0) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

$$\begin{aligned} s' &= f(s,r,\theta) \\ 0 &= g_1(s,r,\theta,\epsilon) \\ 0 &= g_2(s,r,\theta,\epsilon) \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**



Chaque point de la variété critique est un **point fixe** (stable ou instable) pour la dynamique rapide :

- en dehors de la variété critique : **évolution à l'échelle de temps rapide** vers une branche stable de la variété critique
- sur de la variété critique : **évolution à l'échelle de temps lente**

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

$$\begin{cases} \dot{s} = 0 \\ \dot{r} = g_1(s, r, \theta, 0) \\ \dot{\theta} = g_2(s, r, \theta, 0) \end{cases}$$

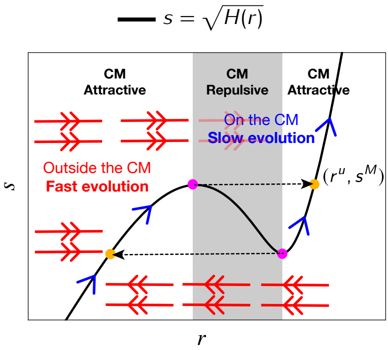
$\hookrightarrow$ sous-système rapide

$$\begin{cases} s' = f(s, r, \theta) \\ 0 = g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ 0 = g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ sous-système lent

Chaque point de la variété critique est un **point fixe** (stable ou instable) pour la dynamique rapide :

- en dehors de la variété critique : **évolution à l'échelle de temps rapide** vers une branche stable de la variété critique
- sur de la variété critique : **évolution à l'échelle de temps lente**



Prédiction des régimes d'oscillation

La prédiction des régimes d'oscillations et donc de la **limite d'atténuation** est possible en déterminant la nature de la dynamique lente sur la variété critique.

$\Rightarrow$ Calcul des points fixes (et leur stabilité) du sous-système lent

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Prédiction des régimes d'oscillation

La prédiction des régimes d'oscillations et donc de la **limite d'atténuation** est possible en déterminant la nature de la dynamique lente sur la variété critique.

$\Rightarrow$ **Calcul des points fixes (et leur stabilité) du sous-système lent**

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Prédiction des régimes d'oscillation

La prédiction des régimes d'oscillations et donc de la **limite d'atténuation** est possible en déterminant la nature de la dynamique lente sur la variété critique.

⇒ **Calcul des points fixes (et leur stabilité) du sous-système lent**

$$\text{Sous-système lent :} \quad \begin{aligned} s' &= f\,(s, r, \theta) \\ 0 &= g_1\,(s, r, \theta, \epsilon) \\ 0 &= g_2\,(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Prédiction des régimes d'oscillation

La prédiction des régimes d'oscillations et donc de la **limite d'atténuation** est possible en déterminant la nature de la dynamique lente sur la variété critique.

$\Rightarrow$ **Calcul des points fixes (et leur stabilité) du sous-système lent**

$$\text{Sous-système lent :} \quad \begin{aligned} s' &= f(s, r, \theta) \\ 0 &= g_1(s, r, \theta, \epsilon) \\ 0 &= g_2(s, r, \theta, \epsilon) \end{aligned}$$

$$s' = f(s, r, \theta) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{s = H(r) \quad \text{et} \quad \theta = G(r)}_{\text{Variété Critique}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r' = f(r)}$$

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent

Prédiction des régimes d'oscillation

La prédiction des régimes d'oscillations et donc de la **limite d'atténuation** est possible en déterminant la nature de la dynamique lente sur la variété critique.

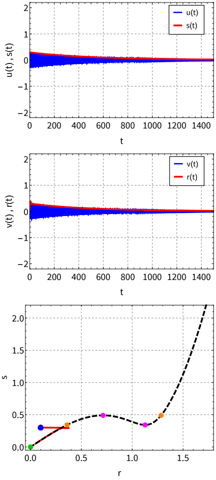
$\Rightarrow$ **Calcul des points fixes (et leur stabilité) du sous-système lent**

$$\text{Sous-système lent :} \quad \begin{aligned} s' &= f\left(s, r, \theta\right) \\ 0 &= g_1\left(s, r, \theta, \epsilon\right) \\ 0 &= g_2\left(s, r, \theta, \epsilon\right) \end{aligned}$$

$$s' = f\left(s, r, \theta\right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{s = H(r) \quad \text{et} \quad \theta = G(r)}_{\text{Variété Critique}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r' = f(r)}$$

Points fixes de la dynamique lente : $\boxed{f\left(r\right) = 0}$ + **Étude de stabilité**

- points fixes stables
- points fixes instables
- point de saut
- point d'arrivée
- condition initiale

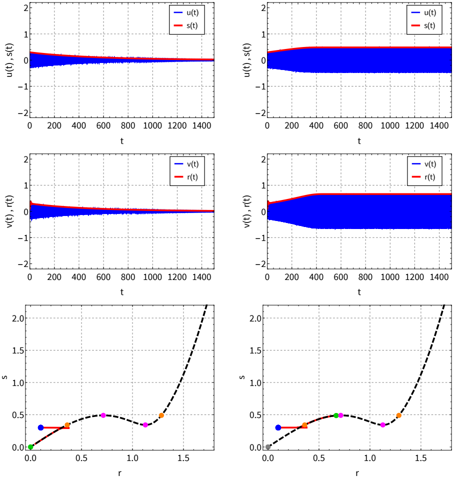


Stabilisation

Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

● points fixes stables ● points fixes instables ● point de saut ● point d'arrivée
● condition initiale



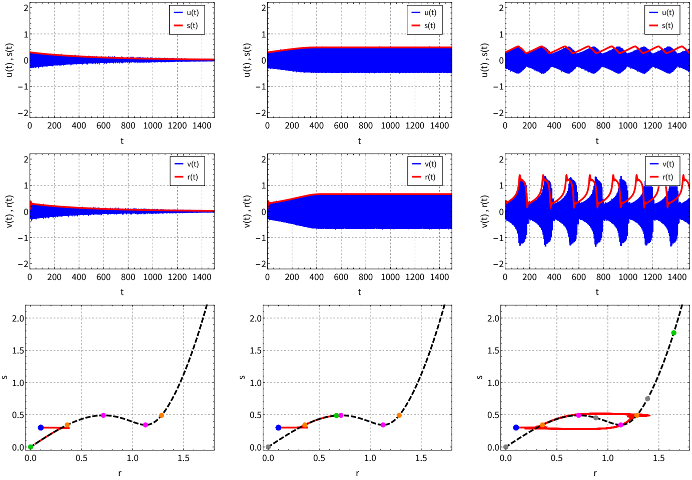
Stabilisation

Régimes périodiques

Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

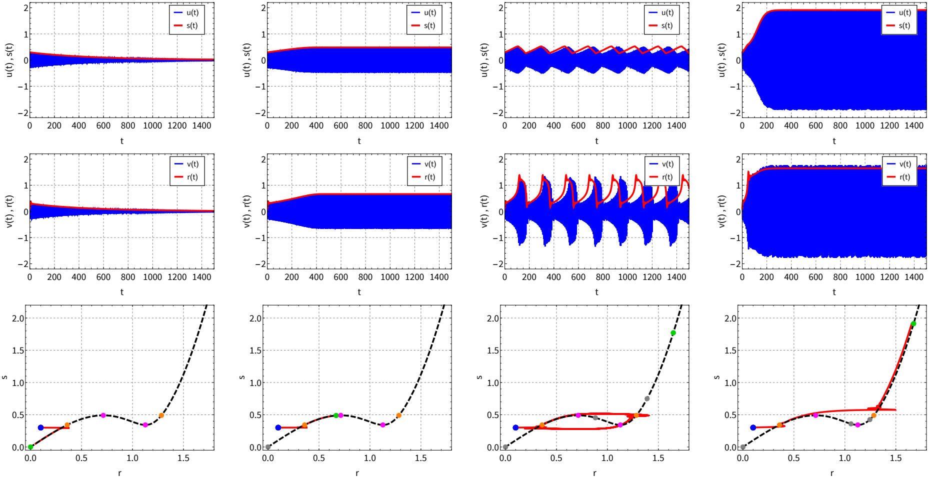
● points fixes stables ● points fixes instables ● point de saut ● point d'arrivée
● condition initiale



Stabilisation | Régimes périodiques | Régimes SMR

Instabilité atténuée | Instabilité non atténuée

● points fixes stables ● points fixes instables ● point de saut ● point d'arrivée
● condition initiale



Stabilisation

Régimes périodiques

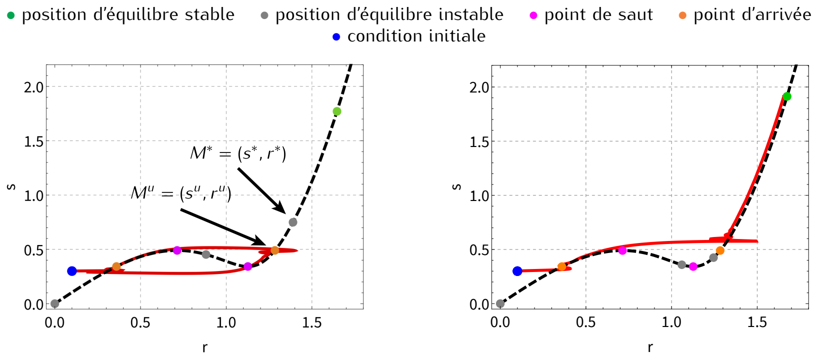
Régimes SMR

"Pas d'effet"

Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

Prédiction des régimes d'oscillations - Analyse asymptotique du flot lent



Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

Limite d'atténuation

- Critère pour que l'instabilité soit atténuée : $\boxed{r^u < r^*}$
- **Limite d'atténuation :** valeur du paramètre de bifurcation choisi (ici ρ) correspondant au passage de $\boxed{r^u < r^*}$ (instabilité atténués) à $\boxed{r^u > r^*}$ (instabilité non atténués)

Plan

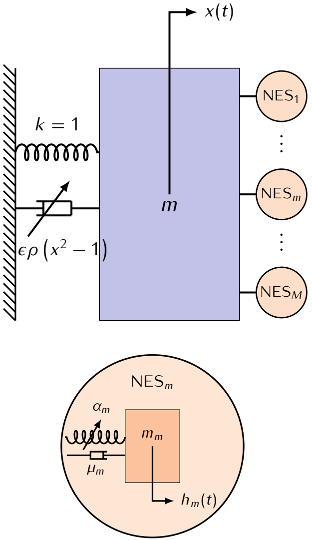
1. Introduction et résultats préliminaires

2. **Systèmes instables couplés à M NESs**
   - Oscillateur de Van der Pol couplé à réseau de M NESs en parallèle
   - Système Primaire à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

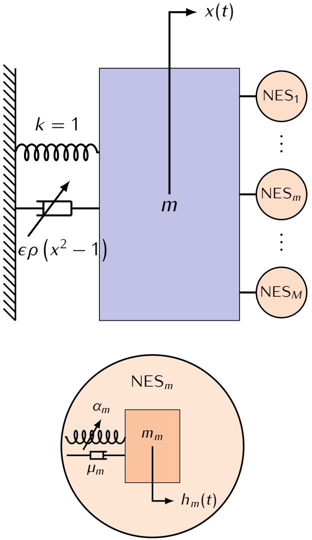
3. Conclusion

Plan

[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Asymptotic analysis of passive mitigation of dynamic instability using a nonlinear energy sink network", *Nonlinear dynamics*]



[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Asymptotic analysis of passive mitigation of dynamic instability using a nonlinear energy sink network", *Nonlinear dynamics*]



Oscillateur de Van der Pol + M ungrounded NESs

Équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{x} + \epsilon\rho\left(x^2-1\right)\dot{x} + x + \\ &\sum_{m=1}^{N}\left[\epsilon\mu_m\left(\dot{x}-\dot{h}_m\right) + \epsilon\alpha_m\left(x-h_m\right)^3\right] = 0 \\ &\epsilon a_m\ddot{h}_m - \epsilon\mu_m\left(\dot{x}-\dot{h}_m\right) - \epsilon\alpha_m\left(x-h_m\right)^3 = 0 \\ &\text{for } m = 1,\ldots,M \end{aligned}}$$

Calcul de flot lent

⇒ **Passage en coordonnées barycentrique**

$$u = x + \epsilon \sum_{m=1}^{M} a_m h_m \qquad v_m = x - h_m, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M$$

⇒ **Méthode de complexification-moyennage** (calcul du flot lent)

$$\psi = \dot{u} + ju \qquad \psi = \phi e^{jt}$$

$$\zeta_m = \dot{v}_m + jv_m, \quad \text{pour } = 1, \dots, M \qquad \zeta_m = \xi_m e^{jt}, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M$$

Expression finale du flot lent en variable réelle

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi = se^{j\delta}}$ $\boxed{\xi = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}}$

et $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_M)^T$ $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_M)^T$ $\vartheta_m = \theta_m - \delta$

Le flot lent est un système **lent-rapide** avec
1 variable lente s **et** $2M$ **variables rapides** r_m **et** ϑ_m $(m = 1, \dots, M)$

Calcul de flot lent

⇒ **Passage en coordonnées barycentrique**

$$u = x + \epsilon \sum_{m=1}^{M} a_m h_m \qquad v_m = x - h_m, \quad \text{pour } m = 1, \ldots, M$$

⇒ **Méthode de complexification-moyennage** (calcul du flot lent)

$$\psi = \dot{u} + ju \qquad \psi = \phi e^{jt}$$

$$\zeta_m = \dot{v}_m + jv_m, \quad \text{pour } = 1, \ldots, M \qquad \zeta_m = \xi_m e^{jt}, \quad \text{pour } m = 1, \ldots, M$$

Expression finale du flot lent en variable réelle

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi = se^{j\delta}}$ $\boxed{\boldsymbol{\xi} = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}}$

et $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_M)^T$ $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_M)^T$ $\vartheta_m = \theta_m - \delta$

Le flot lent est un système lent-rapide avec
1 variable lente s et $2M$ variables rapides r_m et ϑ_m $(m = 1, \ldots, M)$

Calcul de flot lent

⇒ **Passage en coordonnées barycentrique**

$$u = x + \epsilon \sum_{m=1}^{M} a_m h_m \qquad v_m = x - h_m, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M$$

⇒ **Méthode de complexification-moyennage** (calcul du flot lent)

$$\psi = \dot{u} + ju \qquad \psi = \phi e^{jt}$$

$$\zeta_m = \dot{v}_m + jv_m, \quad \text{pour } = 1, \dots, M \qquad \zeta_m = \xi_m e^{jt}, \quad \text{pour } m = 1, \dots, M$$

Expression finale du flot lent en variable réelle

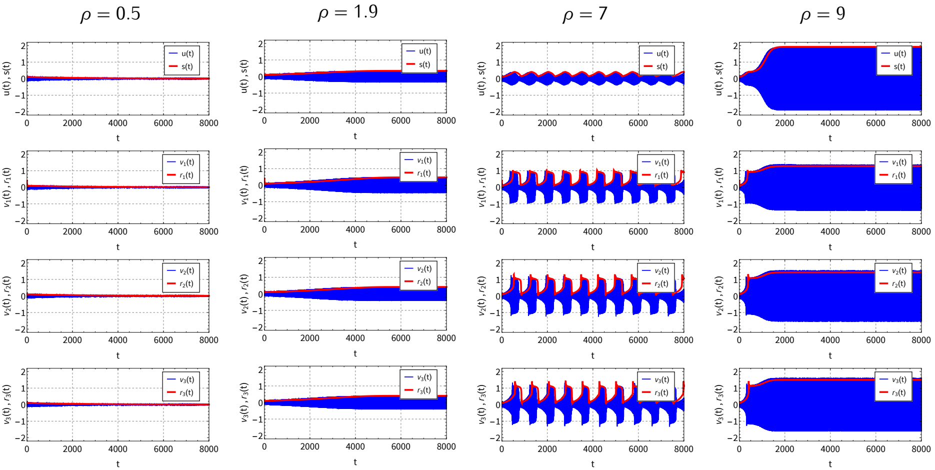
$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi = se^{j\delta}}$ $\boxed{\boldsymbol{\xi} = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}}$

et $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_M)^T$ $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_M)^T$ $\vartheta_m = \theta_m - \delta$

Le flot lent est un système **lent-rapide** avec
1 variable lente s et **$2M$ variables rapides** r_m **et** ϑ_m $(m = 1, \dots, M)$

Système initiale (en variables u et v) **Flot lent (s et r_m pour $m = 1, \ldots, M$)**



Stabilisation

Régimes périodiques

SMR

"Pas d'effet"

Instabilité atténuée

Instabilité non atténuée

La variété critique

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= 0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

$$\boxed{\begin{aligned} s' &= f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ 0 &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ 0 &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{2M+1} \mid \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0,\ \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0\right\}}$$

$$s^2 = H_m(r_m) = r_m^2\left(\left(\frac{\mu_m}{a_m}\right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_m r_m^2}{4a_m}\right)\right) \quad \Rightarrow \quad H_n(r_n) = H_m(r_m)$$

$\vartheta_m = G_m(r_m)$ avec $n = 1, \ldots, M$ et $m = 1, \ldots, M$

- Sous-espace **unidimensionnelle** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

La variété critique

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= 0 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système rapide**

$$\boxed{\begin{aligned} s' &= f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ 0 &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ 0 &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ **sous-système lent**

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{ (s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{2M+1} \mid \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0,\ \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0 \right\}}$$

$$s^2 = H_m(r_m) = r_m^2 \left(\left(\frac{\mu_m}{a_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_m r_m^2}{4a_m} \right) \right) \quad \Rightarrow \quad H_n(r_n) = H_m(r_m)$$

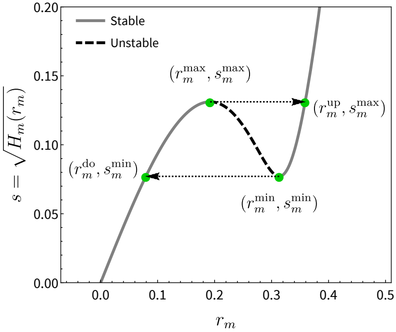
$\vartheta_m = G_m(r_m)$ avec $n = 1, \ldots, M$ et $m = 1, \ldots, M$

- Sous-espace **unidimensionnelle** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

La variété critique

$$s^2 = H_m(r_m) = r_m^2 \left(\left(\frac{\mu_m}{a_m} \right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_m r^2}{4a_m} \right) \right)$$

$$\vartheta_m = G_m(r_m) \quad (m = 1, \ldots, M)$$



Domaine de stabilité de S

$\boxed{D_m = [0\ r_m^{\max}] \cup [r_m^{\min}\ + \infty)}$ avec $\dim(D_m) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \prod_{m=1}^{M} D_m}$ avec $\dim(D) = M$

Domaine de stabilité de S

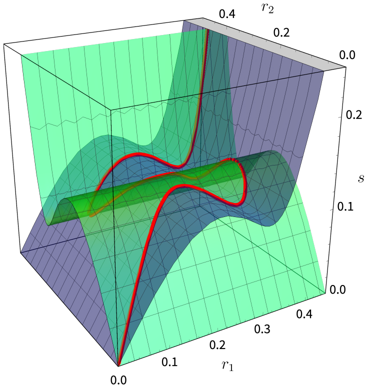
$$\boxed{D = \prod_{m=1}^{M} D_m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \bigcup_{k=1}^{2^M} I_k} \quad \text{avec } \dim(I_k) = M$$

Domaine de stabilité de S

$$\boxed{D = \prod_{m=1}^{M} D_m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \bigcup_{k=1}^{2^M} I_k} \quad \text{avec } \dim(I_k) = M$$

Exemple de variété critique pour $M = 2$ $(2^M = 4)$

Dans (s, r_1, r_2)



Expression de la variété critique :

$$\boxed{\begin{aligned} s^2 &= H_1(r_1) \\ s^2 &= H_2(r_2) \end{aligned}}$$

FIGURE :

$s = \sqrt{H_1(r_1)}$

$s = \sqrt{H_2(r_2)}$

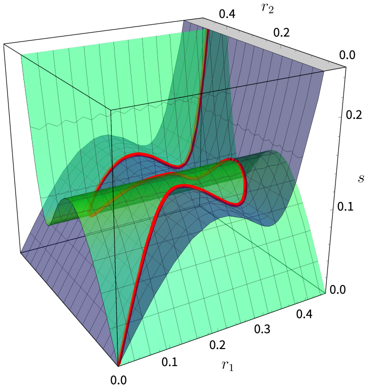
Variété critique

Domaine de stabilité de S

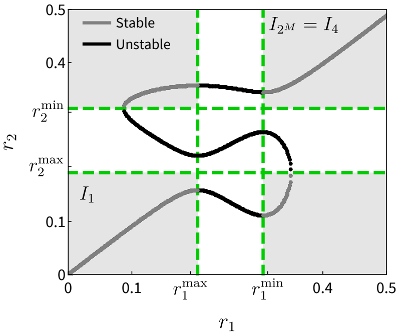
$$\boxed{D = \prod_{m=1}^{M} D_m} \Rightarrow \boxed{D = \bigcup_{k=1}^{2^M} I_k} \quad \text{avec } \dim(I_k) = M$$

Exemple de variété critique pour $M = 2$ ($2^M = 4$)

Dans (s, r_1, r_2)



Dans (r_1, r_2)

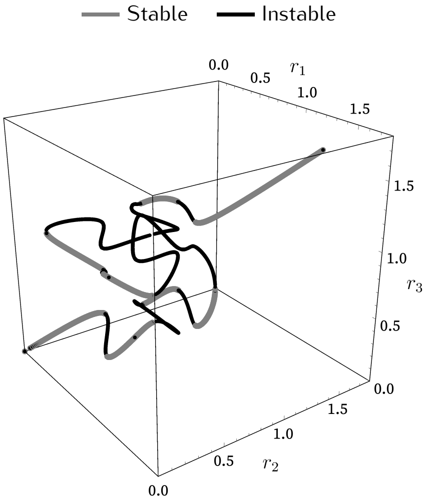


La variété critique

Exemple de variété critique pour $M = 3$ $(2^M = 8)$

Domaine de stabilité de S

$$\boxed{D = \prod_{m=1}^{M} D_m} \Rightarrow \boxed{D = \bigcup_{k=1}^{2^M} I_k}$$



Prédiction des régimes d'oscillations

Prédiction des régimes d'oscillation

Même principe que dans le cas avec 1 NES : **la prédiction des régimes d'oscillations** est possible par l'**analyse de la dynamique lente**.

Prédiction des régimes d'oscillations

Prédiction des régimes d'oscillation

Même principe que dans le cas avec 1 NES : **la prédiction des régimes d'oscillations** est possible par l'**analyse de la dynamique lente**.

$$\text{Sous-système lent :}\quad \begin{aligned} s' &= f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ 0 &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ 0 &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}$$

Prédiction des régimes d'oscillations

Prédiction des régimes d'oscillation

Même principe que dans le cas avec 1 NES : **la prédiction des régimes d'oscillations** est possible par l'**analyse de la dynamique lente**.

$$\text{Sous-système lent :} \quad \begin{aligned} s' &= f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ 0 &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ 0 &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}$$

$$s' = f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{s = H_m(r_m) \quad \text{et} \quad \vartheta_m = G_m(r_m)}_{\text{Variété Critique}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} r_1' &= f(r_1, \ldots, r_M) \\ H_1(r_1) &= H_m(r_m) \ (m = 2, \ldots, M) \end{aligned}}$$

Prédiction des régimes d'oscillations

Prédiction des régimes d'oscillation

Même principe que dans le cas avec 1 NES : **la prédiction des régimes d'oscillations** est possible par l'**analyse de la dynamique lente**.

$$\text{Sous-système lent :}\quad \begin{aligned} s' &= f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \\ 0 &= \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \\ 0 &= \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon) \end{aligned}$$

$$s' = f(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{s = H_m(r_m) \quad \text{et} \quad \vartheta_m = G_m(r_m)}_{\text{Variété Critique}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} r_1' &= f(r_1, \ldots, r_M) \\ H_1(r_1) &= H_m(r_m)\ (m = 2, \ldots, M) \end{aligned}}$$

Points fixes de la dynamique lente :

$$\boxed{f(r_1, \ldots, r_M) = 0} \quad \text{avec} \quad H_1(r_1) = H_m(r_m)\ (m = 2, \ldots, M)$$

$+$ **Étude de stabilité**

Prédiction des régimes d'oscillations

Prédiction des régimes d'oscillation

Même principe que dans le cas avec 1 NES : **la prédiction des régimes d'oscillations** est possible par l'**analyse de la dynamique lente**.

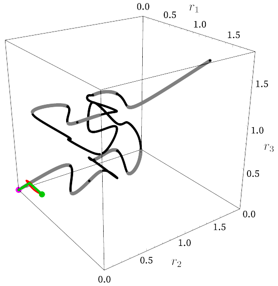
Outils pour la prédiction des régimes d'oscillation

⇒ La **variété critique** S

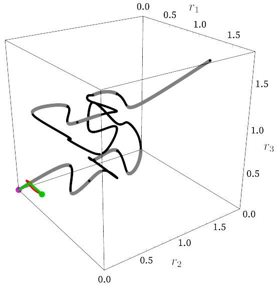
⇒ La dynamique lente sur S

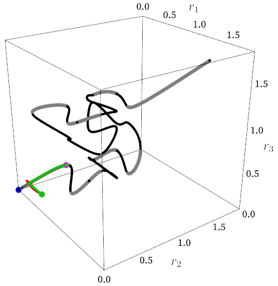
- Les **points fixes du sous système lent** et leur **stabilité**
- La fonction $f(r_1, \ldots, r_M)$

Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique

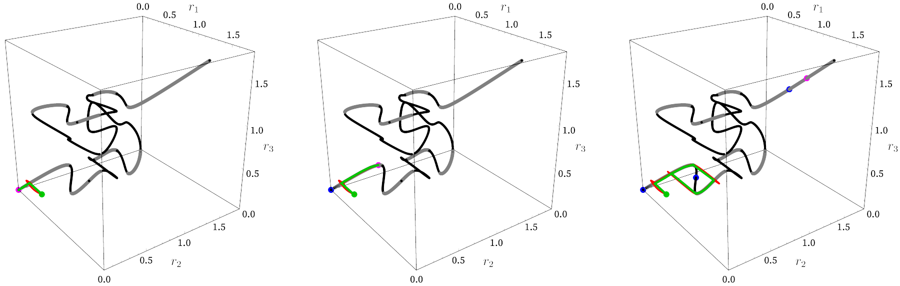


Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique

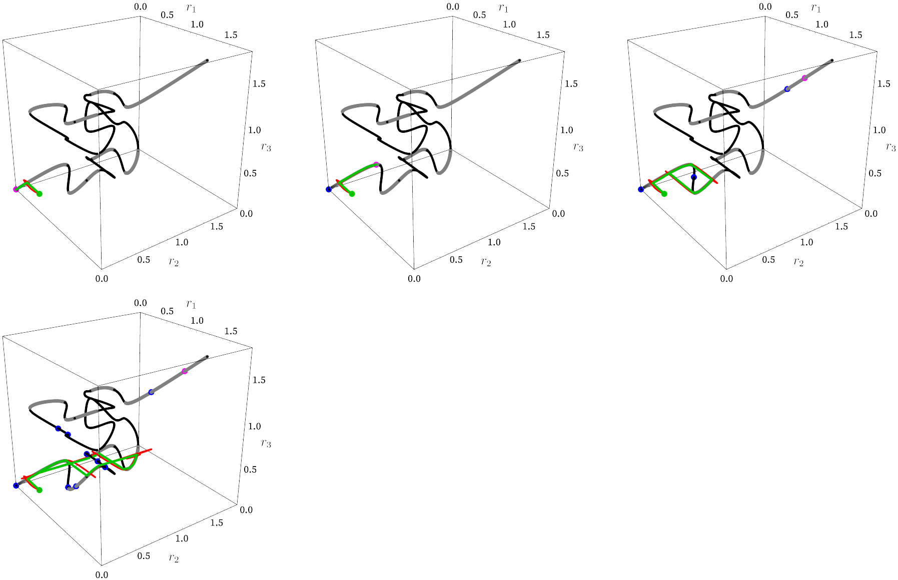




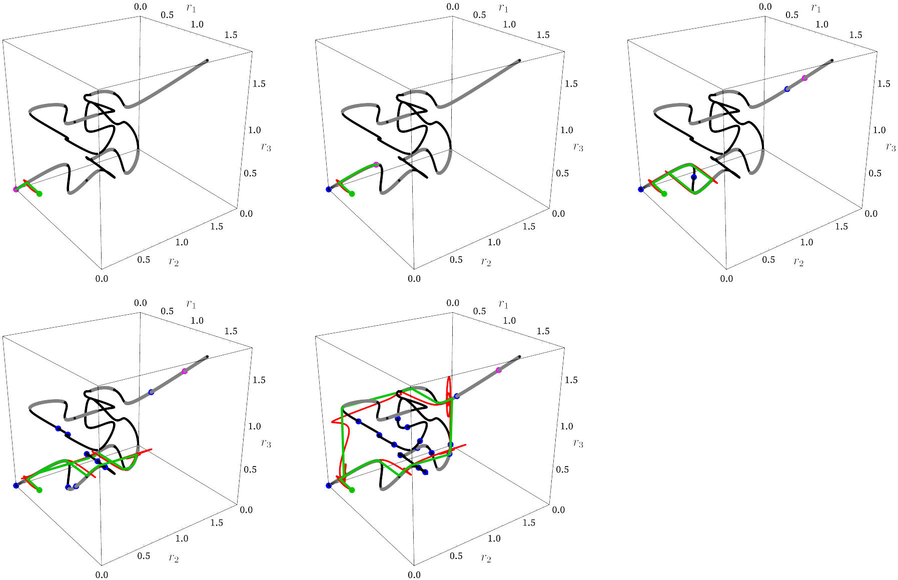
Exemple avec 3 NESs : ● points fixes **stables** ● points fixes **instables**
● condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique



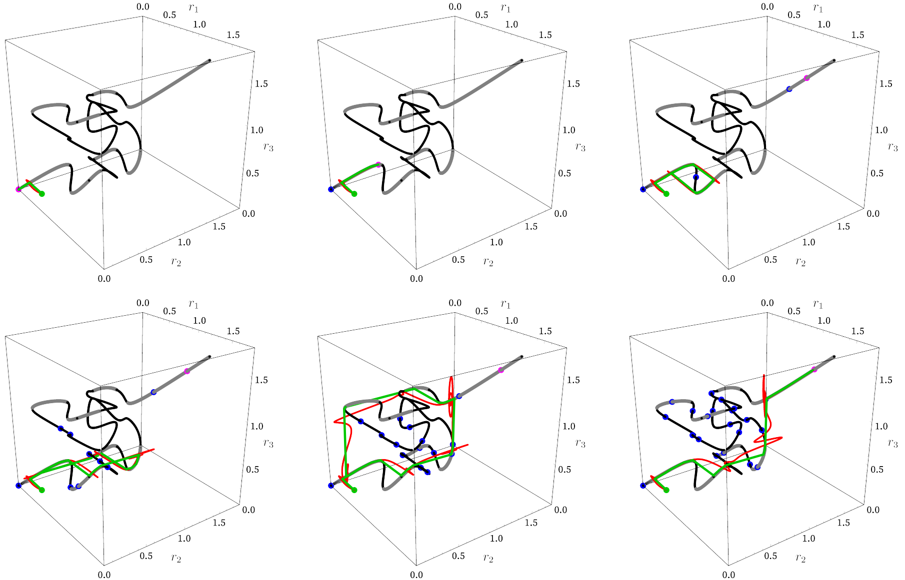
Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique



Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique



Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique



Plan

[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks", *soumis Mechanical Systems and Signal Processing*]

- **Équations du mouvement :**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{M}}\ddot{\tilde{\mathrm{x}}} + \tilde{\mathrm{C}}\dot{\tilde{\mathrm{x}}} + \tilde{\mathrm{K}}\tilde{\mathrm{x}} + \tilde{\mathrm{G}}\mathrm{g}^{\mathrm{NL}}(\tilde{\mathrm{x}}) + \tilde{\mathrm{B}}\Big(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathrm{T}\dot{\tilde{\mathrm{x}}} - \dot{\tilde{\mathrm{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathrm{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathrm{T}\tilde{\mathrm{x}} - \tilde{\mathrm{h}}\right)\Big) &= 0\\ \mathbf{diag}(\tilde{m}_{h_m})\ddot{\tilde{\mathrm{h}}} - \Big(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathrm{T}\dot{\tilde{\mathrm{x}}} - \dot{\tilde{\mathrm{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathrm{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathrm{T}\tilde{\mathrm{x}} - \tilde{\mathrm{h}}\right)\Big) &= 0\end{aligned}$$

- **Sous forme adimensionnée :**

$$\begin{aligned}\ddot{\mathrm{x}} + \mathrm{C}\dot{\mathrm{x}} + \mathrm{K}\mathrm{x} + \epsilon\mathrm{G}\mathrm{g}^{\mathrm{NL}}(\mathrm{x}) + \epsilon\mathrm{B}\ddot{\mathrm{h}} &= 0\\ \epsilon\ddot{\mathrm{h}} - \Big(\epsilon\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})(\mathrm{T}\dot{\mathrm{x}} - \dot{\mathrm{h}}) + \epsilon\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathrm{f}^{\mathrm{NL}}(\mathrm{T}\mathrm{x} - \mathrm{h})\Big) &= 0\end{aligned}$$

- **Hypothèse :** le système primaire n'a qu'un seul mode instable

  $\Rightarrow$ **Réduction de la dynamique du système primaire par transformation bi-normale** qui permet de ne conserver que le mode instable

[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks", *soumis Mechanical Systems and Signal Processing*]

- **Équations du mouvement :**

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}+\tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}+\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}}+\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\tilde{\mathbf{x}})+\tilde{\mathbf{B}}\left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}-\dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right)+\mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{h}}\right)\right)&=\mathbf{0}\\ \mathbf{diag}(\tilde{m}_{h_m})\ddot{\tilde{\mathbf{h}}}-\left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}-\dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right)+\mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}}-\tilde{\mathbf{h}}\right)\right)&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

- Sous forme adimensionnée :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}+\epsilon\mathbf{G}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{x})+\epsilon\mathbf{B}\ddot{\mathbf{h}}&=\mathbf{0}\\ \epsilon\ddot{\mathbf{h}}-\left(\epsilon\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})(\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}-\dot{\mathbf{h}})+\epsilon\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{T}\mathbf{x}-\mathbf{h})\right)&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

- **Hypothèse :** le système primaire n'a qu'un seul mode instable

$\Rightarrow$ **Réduction de la dynamique du système primaire par transformation bi-normale** qui permet de ne conserver que le mode instable

[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks", *soumis Mechanical Systems and Signal Processing*]

- **Équations du mouvement :**

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{B}}\left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)\right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{diag}(\tilde{m}_{h_m})\ddot{\tilde{\mathbf{h}}} - \left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}}$$

- **Sous forme adimensionnée :**

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{G}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{B}\ddot{\mathbf{h}} &= \mathbf{0} \\ \epsilon\ddot{\mathbf{h}} - \left(\epsilon\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})(\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{h}}) + \epsilon\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{h})\right) &= \mathbf{0} \end{aligned}}$$

- **Hypothèse :** le système primaire n'a qu'un seul mode instable

$\Rightarrow$ **Réduction de la dynamique du système primaire par transformation bi-normale** qui permet de ne conserver que le mode instable

[**B. Bergeot et S. Bellizzi**, "Steady-state regimes prediction of a multi-degree-of-freedom unstable dynamical system coupled to a set of nonlinear energy sinks", *soumis Mechanical Systems and Signal Processing*]

- **Équations du mouvement :**

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{G}}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\tilde{\mathbf{x}}) + \tilde{\mathbf{B}}\left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)\right) &= \mathbf{0}\\ \mathbf{diag}(\tilde{m}_{h_m})\ddot{\tilde{\mathbf{h}}} - \left(\mathbf{diag}(\tilde{c}_{h_m})\left(\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\tilde{\mathbf{h}}}\right) + \mathbf{diag}(\tilde{\lambda}_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}\left(\mathbf{T}\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{h}}\right)\right) &= \mathbf{0}\end{aligned}}$$

- **Sous forme adimensionnée :**

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{G}\mathbf{g}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{x}) + \epsilon\mathbf{B}\ddot{\mathbf{h}} &= \mathbf{0}\\ \epsilon\ddot{\mathbf{h}} - \left(\epsilon\,\mathbf{diag}(\gamma_{h_m})(\mathbf{T}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{h}}) + \epsilon\mathbf{diag}(\alpha_{h_m})\mathbf{f}^{\mathrm{NL}}(\mathbf{T}\mathbf{x} - \mathbf{h})\right) &= \mathbf{0}\end{aligned}}$$

- **Hypothèse :** le système primaire n'a qu'un seul mode instable

$\Rightarrow$ **Réduction de la dynamique du système primaire par transformation bi-normale** qui permet de ne conserver que le mode instable

Le flot lent

Expression finale du flot lent en variable réelle

Même forme que dans le cas d'1 DDL coulplé à M NESs en parallèle

Le flot lent

Expression finale du flot lent en variable réelle

Même forme que dans le cas d'1 DDL coulplé à M NESs en parallèle

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{s} &= \epsilon f\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}\right) \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{g}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right) \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}} &= \mathbf{h}\left(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, \epsilon\right) \end{aligned}}$$

avec $\boxed{\phi = s e^{j\delta}}$ $\boxed{\boldsymbol{\xi} = \mathbf{diag}\left(e^{j\theta_m}\right)\mathbf{r}}$

et $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_M)^T$ $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_M)^T$ $\vartheta_m = \theta_m - \delta$

Le flot lent est un système **lent-rapide** avec
1 variable lente s **et** $2M$ **variables rapides** r_m **et** ϑ_m $(m = 1, \ldots, M)$

La variété critique

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{ (s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{2M+1} \mid \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0,\ \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0 \right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & s^2 = \frac{H_m(r_m)}{|B_m|^2} = \left(\frac{\omega r_m}{|B_m|}\right)^2 \left(\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_{h_m} r_m^2}{4\omega^4}\right)\right) \\ & \vartheta_m = G_m(r_m) \quad (m = 1, \ldots, M) \end{aligned}}$$

B_m : constante dépendante des paramètres du système primaire

La variété critique

Variété critique

$$\boxed{S := \left\{ (s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{2M+1} \mid \mathbf{g}\,(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0,\ \mathbf{h}\,(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0 \right\}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} s^2 &= \frac{H_m(r_m)}{|B_m|^2} = \left(\frac{\omega r_m}{|B_m|}\right)^2 \left(\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_{h_m} r_m^2}{4\omega^4}\right)\right) \\ \vartheta_m &= G_m(r_m) \quad (m = 1, \dots, M) \end{aligned}}$$

B_m : constante dépendante des paramètres du système primaire

- Sous-espace **unidimensionnelle** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

La variété critique

Variété critique

$$S := \left\{ (s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R}^{2M+1} \;\middle|\; \mathbf{g}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0,\ \mathbf{h}(s, \mathbf{r}, \boldsymbol{\vartheta}, 0) = 0 \right\}$$

$$s^2 = \frac{H_m(r_m)}{|B_m|^2} = \left(\frac{\omega r_m}{|B_m|}\right)^2 \left(\left(\frac{\gamma_{h_m}}{\omega}\right)^2 + \left(1 - \frac{3\alpha_{h_m} r_m^2}{4\omega^4}\right) \right)$$
$$\vartheta_m = G_m(r_m) \quad (m = 1, \ldots, M)$$

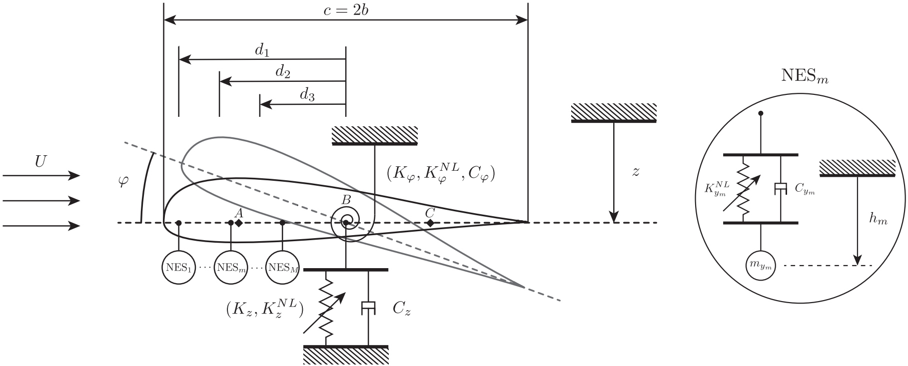
B_m : constante dépendante des paramètres du système primaire

- Sous-espace **unidimensionnelle** de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M$ où évolue le système pendant les phases lentes
- Chaque point de S est un point fixe du sous-système rapide

Prédiction des régimes d'oscillations

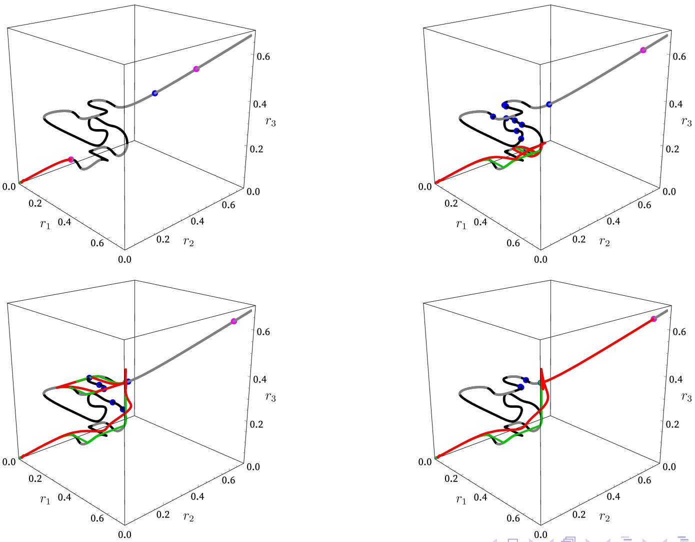
Identique à celle du cas d'1 DDL coulplé à M NESs en parallèle

Application – Atténuation d'une instabilité aéroélastique à l'aide de M NESs



Application – Atténuation d'une instabilité aéroélastique à l'aide de M NESs

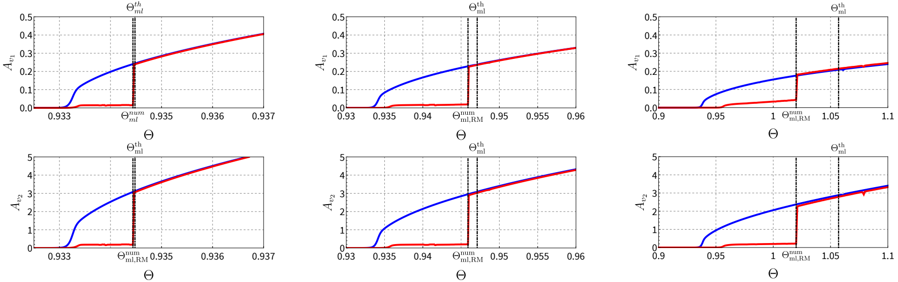
Exemple avec 3 NESs : • points fixes **stables** • points fixes **instables**
• condition initiale — Trajectoire théorique — Trajectoire numérique



Application – Atténuation d'une instabilité aéroélastique à l'aide de M NESs

Justesse de la prédiction théorique

$\epsilon = 10^{-4}$ $\epsilon = 10^{-3}$ $\epsilon = 10^{-2}$



Θ : vitesse réduite (adimensionnée) de l'écoulement

- $\Theta_{\mathrm{ml}}^{\mathrm{th}}$: prédiction théorique de la limite d'atténuation
- $\Theta_{\mathrm{ml,RM}}^{\mathrm{num}}$: estimation de la limite d'atténuation à partir de simulations numériques

Plan

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

⇒ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

$\Rightarrow$ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

$\Rightarrow$ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

$\Rightarrow$ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

$\Rightarrow$ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Résultats principaux

- **Prédiction théorique des régimes d'oscillations**
  - d'un système instable à 1 DDL couplé à un réseau de M NESs parallèles
  - d'un système instable à N DDLs couplé à un ensemble de M NESs

$\Rightarrow$ Bonne accords entre la prédiction théorique et les simulations numériques (dans les limites de l'études asymptotiques, c.à.d pour des ϵ petits)

- **Limite de l'étude :**
  - Bonne prédiction pour des ϵ petits
  - 1 seul modes instables

Perspectives

- Amélioration de prédiction théorique pour prendre en compte des ϵ plus grand et donc des NESs plus efficaces
- Prise en compte de plusieurs modes instables
- **Application possibles :**
  - Modèle de frein plus réaliste (des modes EF montrent la présence de plusieurs modes instables)
  - Sourdines d'instruments à vent

Merci de votre attention