

# Naissance des oscillations dans les instruments de type clarinette à paramètre de contrôle variable

**Baptiste Bergeot**

Post-Doctorant à l'École Centrale Marseille (LMA)

---

Travaux de thèse (LAUM), dirigée par :

**André Almeida, Christophe Vergez et Bruno Gazengel**

12 Novembre 2013



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion

# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

### Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes

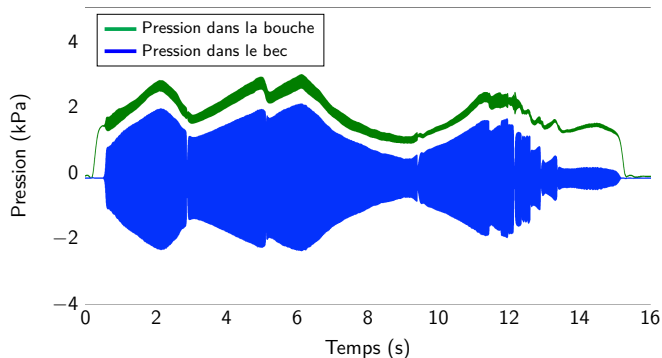


# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

### Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes



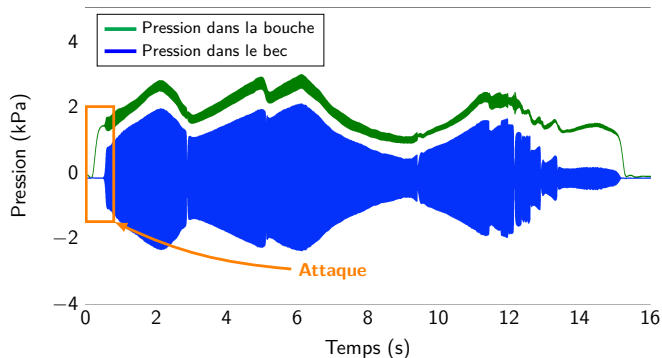
**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bec instrumenté (SDNS-AIMV). Phrase musicale complète.

# Contexte général

## Projet ANR SDNS-AIMV

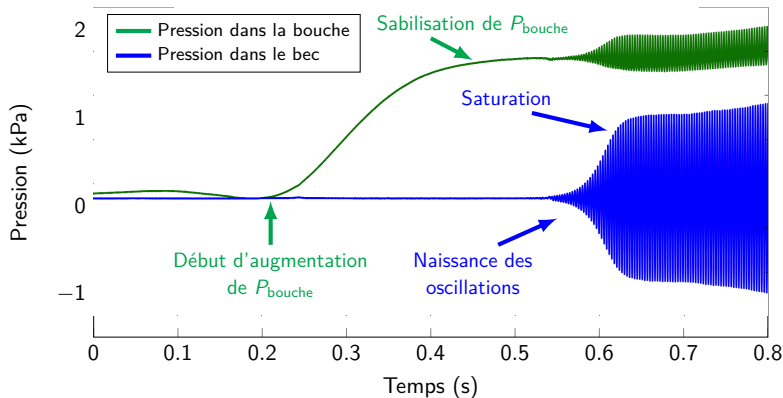
Systèmes Dynamiques Non Stationnaires - Application aux Instruments de Musique à Vent

### Étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes



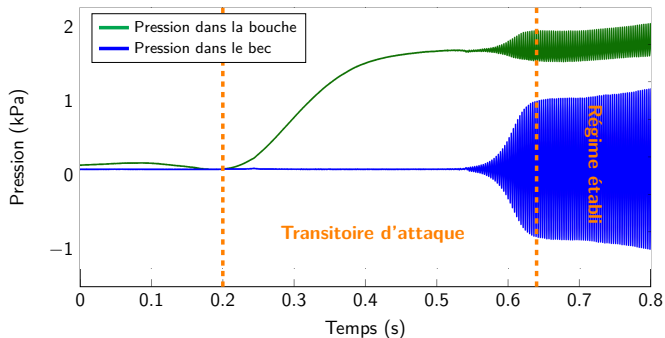
**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bec instrumenté (SDNS-AIMV). Phrase musicale complète.

# Description de l'attaque



**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette par P.A. Taillard sur un bec instrumenté (SDNS-AIMV). Description de l'attaque.

# Transitoire d'attaque



**Figure :** Exercice d'entraînement joué à la clarinette. Début et fin du transitoire d'attaque.

## Transitoire d'attaque :

- ⇒ **Début** : moment où la pression dans la bouche commence à augmenter ;
- ⇒ **Fin** : quand le régime établi sur la pression dans le bec est atteint.

**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**





**Pendant le transitoire d'attaque  
le musicien contrôle :**

⇒ la pression dans sa bouche ;



## **Pendant le transitoire d'attaque le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;



## **Pendant le transitoire d'attaque le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;



## **Pendant le transitoire d'attaque le musicien contrôle :**

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;



## Pendant le transitoire d'attaque le musicien contrôle :

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;
- ⇒ ...



## Pendant le transitoire d'attaque le musicien contrôle :

- ⇒ la pression dans sa bouche ;
- ⇒ la force d'appui de sa lèvre sur l'anche ;
- ⇒ conduit vocal ;
- ⇒ l'ouverture du canal d'anche avec sa langue ;
- ⇒ ...

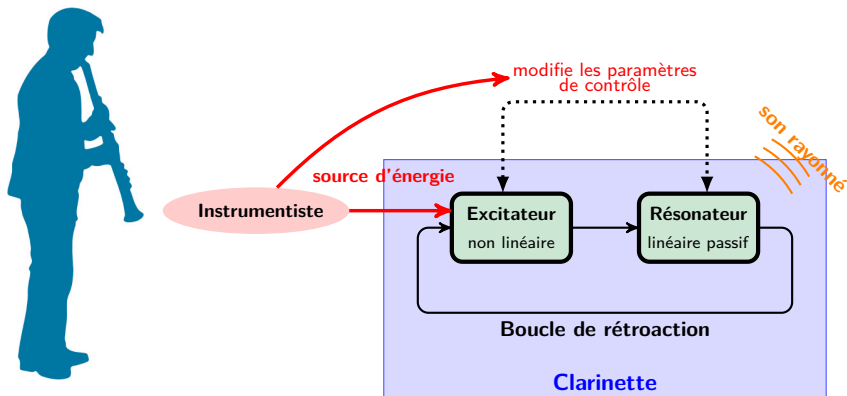
### Paramètres de contrôle



**Geste instrumental**



## La clarinette : un instrument auto-oscillant



[Mc Intyre et al., *On the oscillation of musical instruments*, JASA, 1983.]

On s'intéresse à l'influence de la variation de la **pression dans la bouche** sur la naissance des auto-oscillations (**observées dans le bec.**)



On s'intéresse à l'influence de la variation de la **pression dans la bouche** sur la naissance des auto-oscillations (**observées dans le bec.**)

Pression dans la bouche

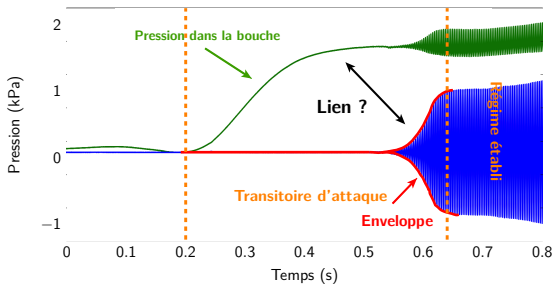


Pression dans le bec

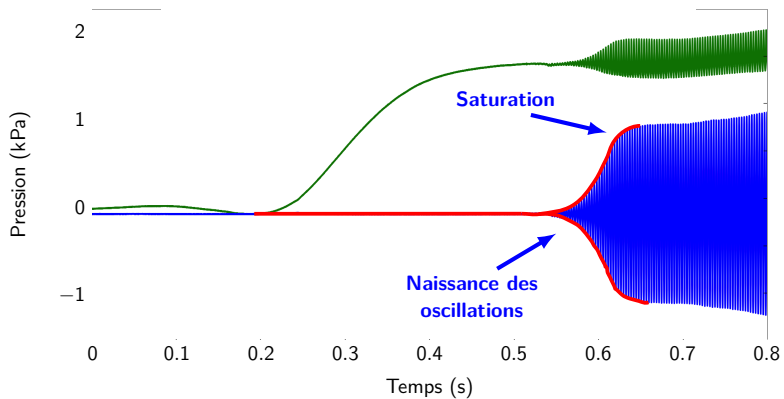


## Objectif

Relier l'enveloppe de la pression dans le bec au profil temporel de la pression de la bouche.

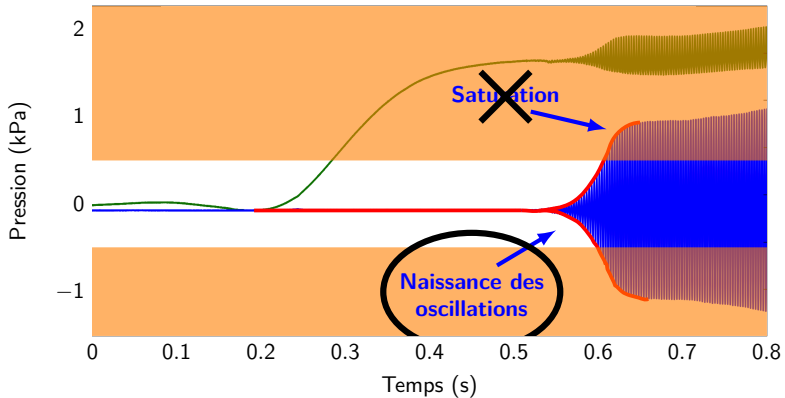


## Réduction du domaine d'étude :



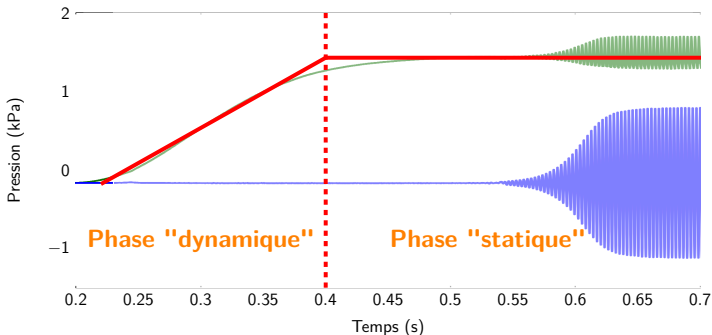
## Réduction du domaine d'étude :

⇒ On ne s'intéresse qu'à la naissance des oscillations. Pas à la saturation ;

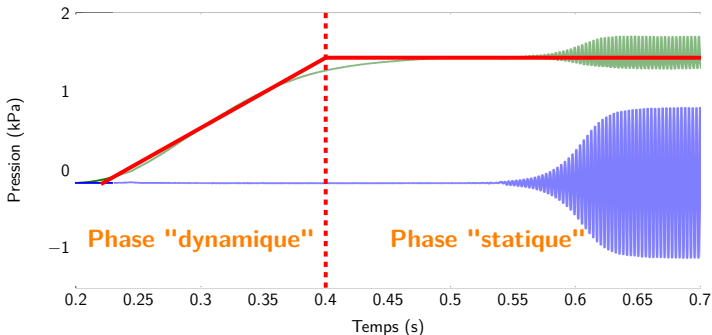


⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;

- ⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;
- ⇒ Profil idéal pour la pression dans la bouche :
- Phase "dynamique" : la pression dans la bouche augmente linéairement.
  - Phase "statique" : la pression dans la bouche constante.



- ⇒ Pression dans la bouche variable, les autres paramètres de contrôle sont constants ;
- ⇒ Profil idéal pour la pression dans la bouche :
- Phase "dynamique" : la pression dans la bouche augmente linéairement.
  - Phase "statique" : la pression dans la bouche constante.



### Vocabulaire

... "dynamique" : pression dans la bouche variable

... "statique" : pression dans la bouche constante

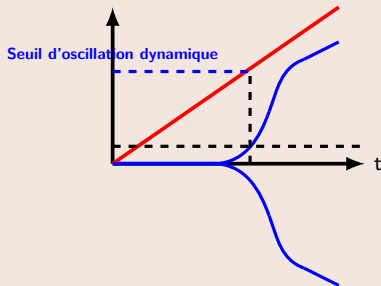
## Phase "Statique" :

- ⇒ Littérature importante en physique des instruments de musique ;
- ⇒ Comportement de l'instrument bien connu.

## Phase "Statique" :

- ⇒ Littérature importante en physique des instruments de musique ;
- ⇒ Comportement de l'instrument bien connu.

## Étude de la phase "dynamique"



$$P_{\text{bouche}}(t) = at + b$$

## Enveloppe du son

- ⇒ Descripteur de la naissance des oscillations :

**Seuil d'oscillation dynamique**

**Définition** : valeur de la pression dans la bouche après laquelle un seuil sur l'amplitude du son (arbitrairement défini) est dépassé

- ⇒ Influence de  $a$  et  $b$  sur le **seuil d'oscillation dynamique**.



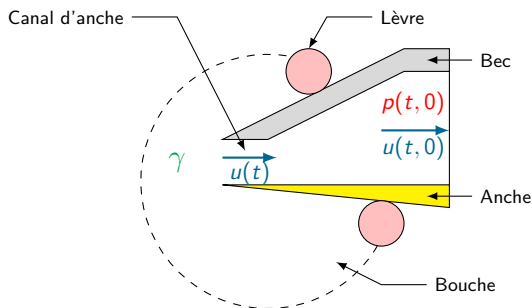
# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
  - Modèle de clarinette dit de "Raman"
  - Comportement "statique" du modèle
  - Comportement "dynamique" du modèle
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
  - Mesure sur bouche artificielle
  - Simulations numériques du modèle de "Raman"
- 4 Étude analytique du cas dynamique
  - La théorie de la bifurcation dynamique
  - La courbe invariante
  - Prédiction de l'enveloppe
- 5 Conclusion

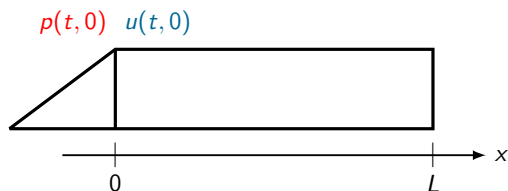
# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
  - Modèle de clarinette dit de "Raman"
  - Comportement "statique" du modèle
  - Comportement "dynamique" du modèle
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion

Le système  
anche bec  
(l'excitateur)



Le corps de  
l'instrument  
(le résonateur)



**Remarque :** utilisation de variables adimensionnées

[Chaigne & Kergomard, "Acoustique de instruments de musique", Chap. 9, 2008]

# Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

**Clarinete  $\equiv$  résonateur cylindrique**

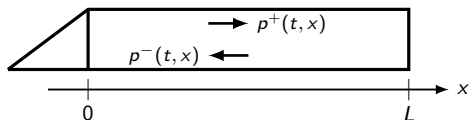
# Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

## Clarinette $\equiv$ résonateur cylindrique

$\Rightarrow$  Propagation d'ondes planes : Représentation en onde aller  $p^+$  et onde retour  $p^-$

$$p = p^+ + p^-$$

$$u = p^+ - p^-$$

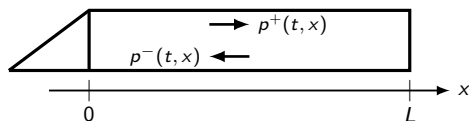


# Le modèle dit "de Raman" [Chaigne & Kergomard, Chap. 9, 2008]

## Clarinette $\equiv$ résonateur cylindrique

$\Rightarrow$  Propagation d'ondes planes : Représentation en onde aller  $p^+$  et onde retour  $p^-$

$$p = p^+ + p^- \quad u = p^+ - p^-$$



$\Rightarrow$  **C.L.1** : Conditions à la limite à l'extrémité ( $x = L$ ) : Réflexion totale à l'extrémité d'un tube ouvert :

$$\text{À l'extrémité ; } x = L \quad p^-(t, L) = -p^+(t, L)$$

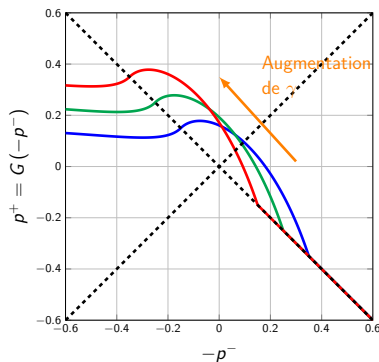
$$\text{Au niveau du bec ; } x = 0 \quad p^-(t, 0) = -\lambda p^+(t - \tau, 0)$$

$\tau$  : durée d'un aller-retour de l'onde dans le résonateur.

$\lambda$  : paramètre de pertes : constant pour une longueur donnée du résonateur

⇒ **C.L.2** : Conditions à la limite au niveau du bec ( $x=0$ ) : **Non linéaire**  
 (hydrodynamique de l'écoulement à l'entrée du bec :  $u = F(\gamma - p)$  par Bernoulli)

$$\text{Bernoulli} \left\{ \begin{array}{l} \{p; u\} \\ u(t, 0) = F(\gamma - p(t, 0)) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \{p^+; p^-\} \\ p^+(t, 0) = G(-p^-(t, 0)) \end{array} \right.$$



**Figure** : Fonction  $G$ . Effet de la variation de  $\gamma$ .

Expression analytique de  $G$  : [Taillard et al., "Iterated maps for clarinet-like systems", *Nonlinear dynamics*, 2010]

$$\text{C.L.1 et C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$



**C.L.1** et **C.L.2**  $\implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$

**Notation** :  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

**C.L.1** et **C.L.2**  $\implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$

**Notation** :  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

**Modèle sans pertes** :  $\lambda = 1$

---

$$\text{C.L.1 et C.L.2} \implies p^+(t, 0) = G(\lambda p^+(t - \tau, 0))$$

**Notation :**  $p^+(n\tau, 0) = p_n^+$  et  $G(\lambda x) = f(x)$ .

Le système est décrit par une **carte itérée** :  $p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$

Paramètre de contrôle  $\gamma$

[Maganza et al., *Europhysics Letters*, 1986]

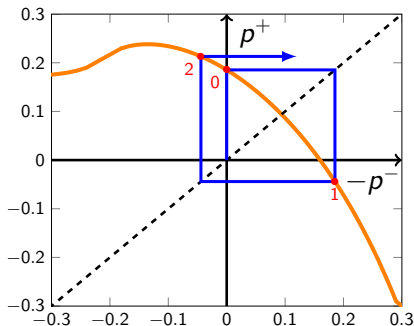
**Modèle sans pertes :**  $\lambda = 1$

**Figure :** Résolution graphique de

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$

— Fonction  $f$

- - - Identité



# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

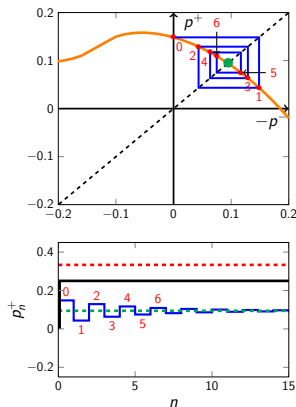
## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, 1979] [Dalmont et al., *JASA*, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]

# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, 1979] [Dalmont et al., *JASA*, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]



—  $f$

—  $\gamma$

—  $\gamma_{st}$  seuil  
d'oscillation statique

•  $p^{+*}$  point fixe de  $f$  :

$$p^{+*} = f(p^{+*})$$

- - - régime établi

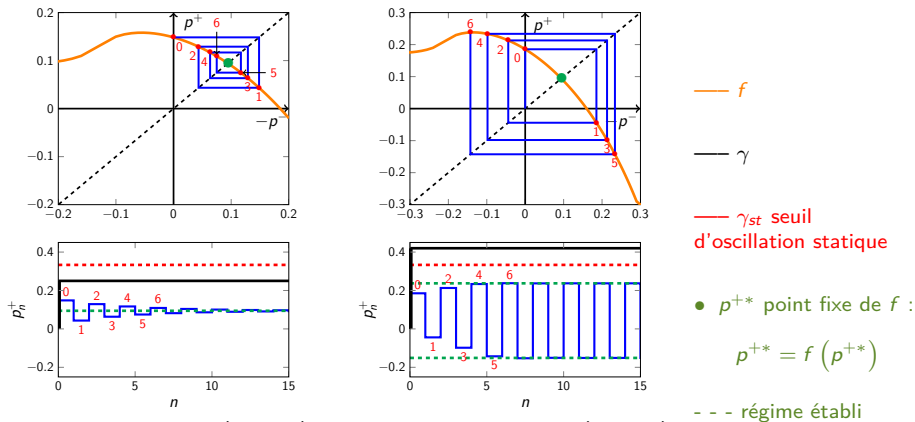
**Point fixe de  $f$  stable** ( $\gamma < \gamma_{st}$ )

Régime établi non oscillant

# Étude "statique" : comportement du modèle quand $\gamma$ est constant

## Seuil d'oscillation statique

[Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, 1979] [Dalmont et al., *JASA*, 2005.] [Taillard et al., *Nonlinear dynam.*, 2010]



**Point fixe de  $f$  stable ( $\gamma < \gamma_{st}$ )**

Régime établi non oscillant

**Point fixe de  $f$  instable ( $\gamma > \gamma_{st}$ )**

Régime établi oscillant

## Enveloppe au début du transitoire, stabilité du point fixe de $f$ et seuil d'oscillation statique

Linéarisation de la fonction d'itération  $f$  autour de son point fixe  $p^{+*}$

⇒ L'écart au point  $w_n = p_n^+ - p^{+*}$

$$w_n \approx w_0 [f'(p^{+*})]^n.$$

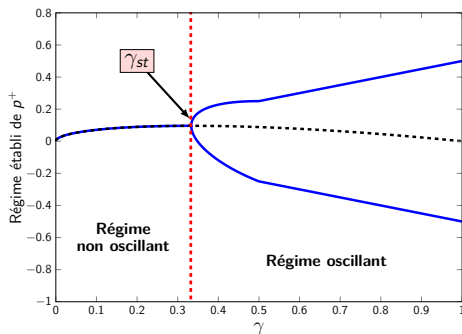
- $|f'(p^{+*})| < 1$  :  $p_n^+$  décroît exponentiellement vers  $p^{+*}$  ;
- $|f'(p^{+*})| > 1$  :  $p_n^+$  s'écarte exponentiellement de  $p^{+*}$ .

⇒ Condition de stabilité du point fixe :  $|f'(p^{+*})| < 1$

⇒ **Seuil d'oscillation statique**  $\gamma_{st}$  : valeur de  $\gamma$  solution de la condition de stabilité du point fixe.

## Diagramme de bifurcation "statique"

- ⇒ Représente l'amplitude du régime établi de  $p^+$  en fonction de  $\gamma$ .
- ⇒ Obtenu en choisissant une valeur de  $\gamma$  et en laissant le système atteindre son régime établi ;
- ⇒ Opération répétée pour chaque valeur  $\gamma$ .



**Figure :** Diagramme de bifurcation "statique" du modèle sans pertes.

$\gamma_{st}$  : Seuil d'oscillation statique

- - - : courbe des points fixes de  
 $f : p^{+*}(\gamma)$ .



# Comportement "dynamique" du modèle dans la littérature

[Atig et al., *Appl. Acoust.*, 2004]

- ⇒ (c) Simulation temporelle du modèle de "Raman" avec variation linéaire de la pression dans la bouche.
- ⇒ (a) Amplitude de la pression dans le bec vs. la pression dans la bouche.

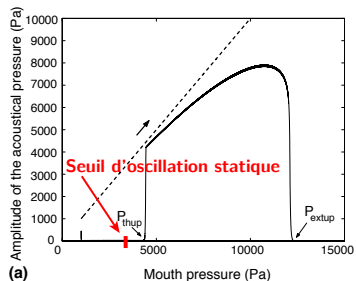
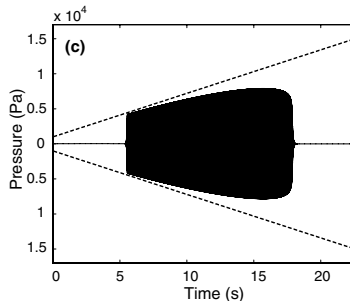
## Diagramme de bifurcation "dynamique"

- ⇒  $P_{thup}$  : "threshold of oscillation for increasing pressure".

## Seuil d'oscillation "dynamique"

### Observations :

- ⇒ Seuil statique < Seuil dynamique
- ⇒ Variation lente de la pression dans la bouche : Seuil dynamique → Seuil statique



# Sommaire

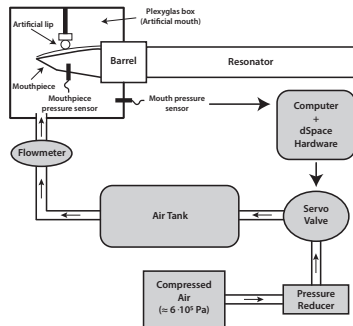
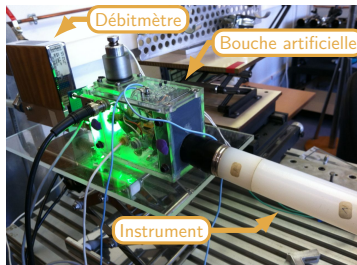
- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés**
  - Mesure sur bouche artificielle
  - Simulations numériques du modèle de "Raman"
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion

# Dispositif expérimental

## Bouche artificielle asservie en pression d'alimentation

+

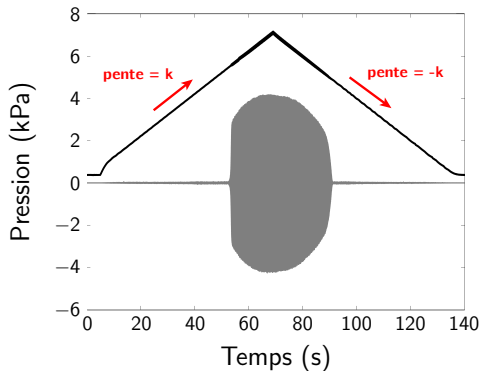
## Clarinette de laboratoire



### Mesure simultanée de :

$P_m$  : pression dans la bouche ;  $P$  : pression dans le bec ;  $U$  : débit créé par  $P_m - P$ .

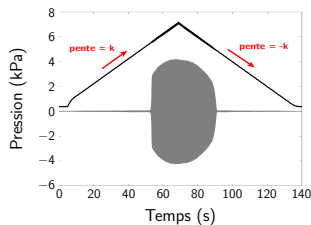
# Description de l'expérience



— : Pression dans la bouche

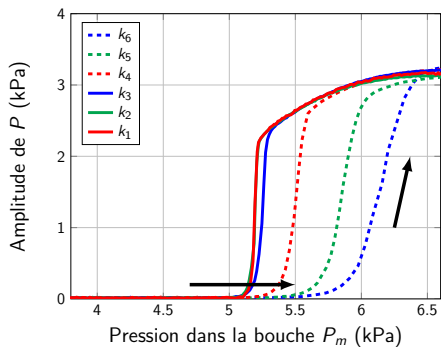
— : Pression dans le bec

# Résultats expérimentaux

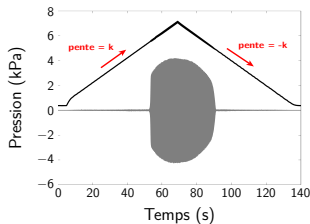


$k$  : pente de  $P_m(t)$

$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .



# Résultats expérimentaux



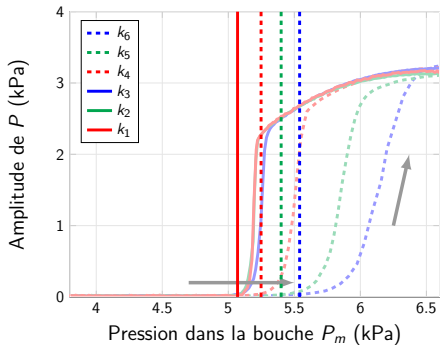
$k$  : pente de  $P_m(t)$

$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

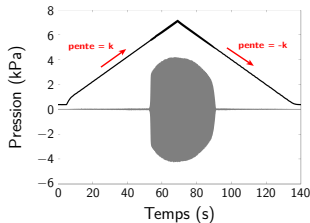
| : positions des seuils d'oscillation dynamiques expérimentaux.

**Observations :**

⇒ Seuil d'oscillation dynamique augmente quand  $k$  augmente.



# Résultats expérimentaux

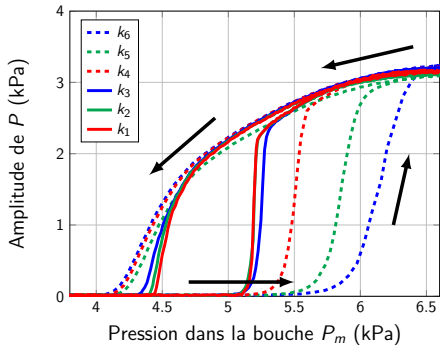


$k$  : pente de  $P_m(t)$

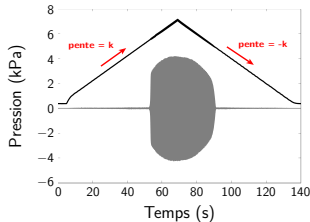
$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

**Observations :**

⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
augmente quand  $k$  augmente.



# Résultats expérimentaux



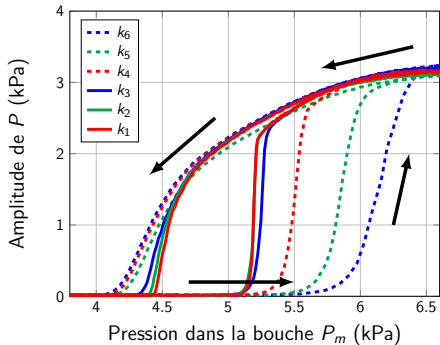
$k$  : pente de  $P_m(t)$

$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

**Observations :**

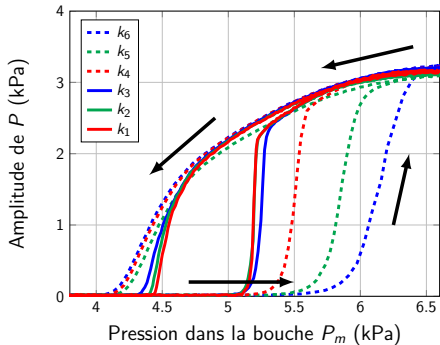
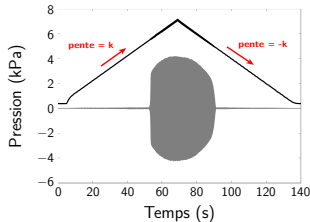
⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
augmente quand  $k$  augmente.

⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
(mesuré en montée)  
supérieur au  
Seuil d'extinction  
(mesurée en descente)





# Résultats expérimentaux



$k$  : pente de  $P_m(t)$

$k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5 < k_6$ .

## Observations :

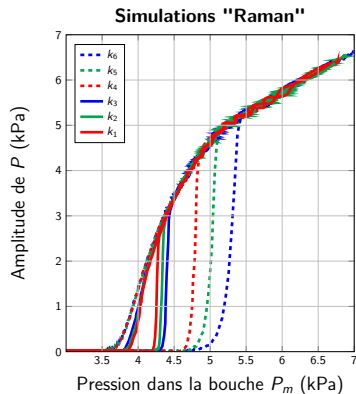
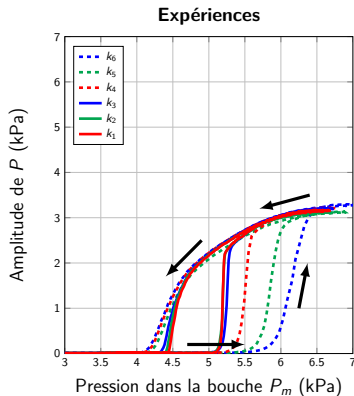
⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
augmente quand  $k$  augmente.

⇒ Seuil d'oscillation dynamique  
(mesuré en montée)  
supérieur au  
Seuil d'extinction  
(mesurée en descente)

⇒ [Dalmont et al., JASA, 2007.] ;  
Seuil d'oscillation d'extinction  
proche du  
Seuil d'oscillation statique  
théorique ;

# Résultats expérimentaux

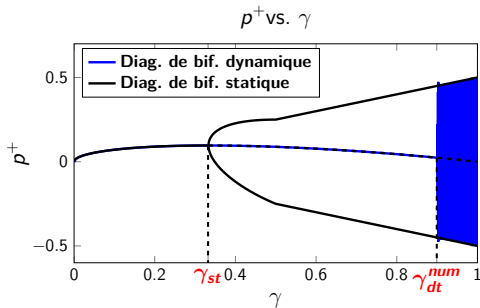
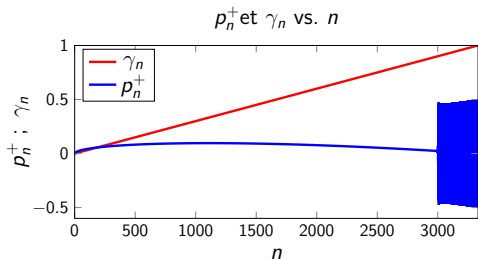
## Comportement similaire du modèle de "Raman"



### Simulations :

- ⇒ Extraction des paramètres à partir de la mesure du débit entrant  $U(t)$  ;
- ⇒ Effectuée avec les profils mesurés de pression dans la bouche.

# Propriétés du seuil dynamique



Variation linéaire de  $\gamma$  :

$$\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$$

$p_n^+$  en fonction de  $\gamma_n$



Diagramme de bifurcation  
dynamique

$\gamma_{st}$  : seuil d'oscillation statique

$\gamma_{dt}^{num}$  : seuil d'oscillation  
dynamique "numérique".

Calculé sur les simulations  
numériques du modèle de "Raman".

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

### Précision :

- ⇒ Nombre de chiffres significatifs utilisés par l'ordinateur ;
- ⇒ Contrôlable avec *mpmath* (Python)

[Bergeot et al., "Prediction of ... blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear Dynam.*, 2013]

Précision finie  $\equiv$  bruit blanc additif

### Exemple :

Précision = 15  $\iff$  Bruit blanc  $\sigma = 10^{-15}$

## La dépendance au bruit

Illustration sur des simulations effectuées à précision finie

### Précision :

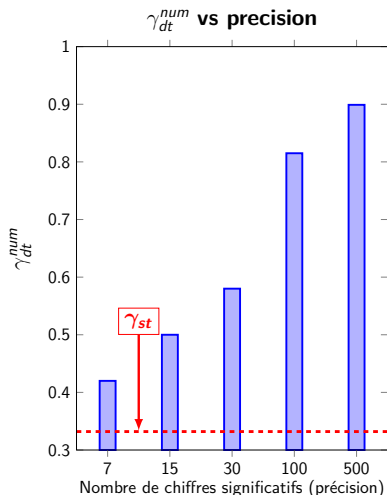
- ⇒ Nombre de chiffres significatifs utilisés par l'ordinateur ;
- ⇒ Contrôlable avec *mpmath* (Python)

[Bergeot et al., "Prediction of ... blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear Dynam.*, 2013]

Précision finie  $\equiv$  bruit blanc additif

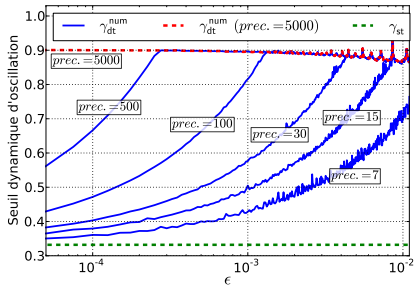
### Exemple :

Précision = 15  $\iff$  Bruit blanc  $\sigma = 10^{-15}$



## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

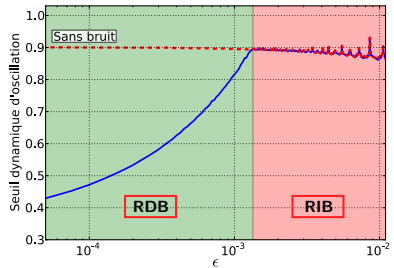
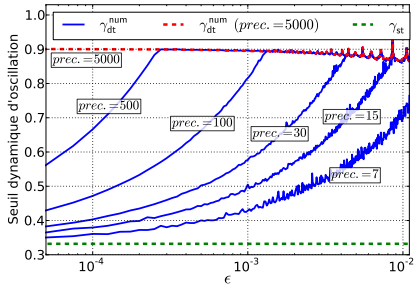
$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

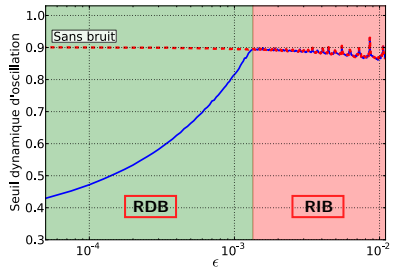
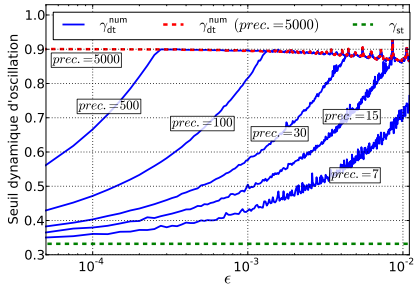
### Deux régimes de fonctionnement :

- $\Rightarrow$  Régime Dépendant du Bruit (RDB) ;
- $\Rightarrow$  Régime Indépendant du Bruit (RIB).



## Influence du paramètre de vitesse d'augmentation de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\epsilon$  pour plusieurs précisions ( $\gamma_0 = 0$ )



Précision = 5000  $\iff$  cas idéal sans bruit

### Deux régimes de fonctionnement :

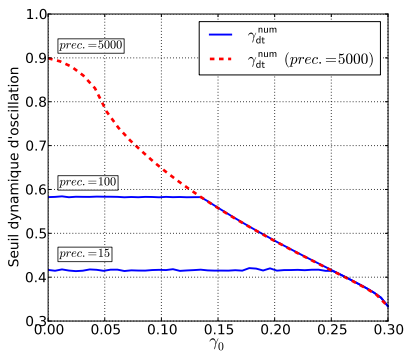
- $\Rightarrow$  Régime Dépendant du Bruit (RDB) ;
- $\Rightarrow$  Régime Indépendant du Bruit (RIB).

### Propriété du seuil dynamique d'oscillation :

- $\Rightarrow$  RDB :  $\gamma_{dt}^{num}$  augmente avec  $\epsilon$  ;
- $\Rightarrow$  RIB :  $\gamma_{dt}^{num}$  "indépendant" de  $\epsilon$  ;

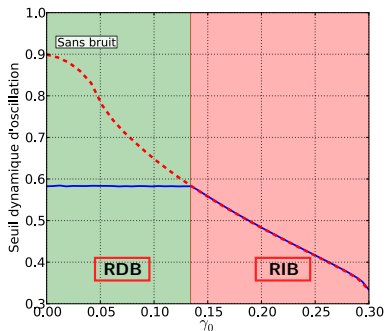
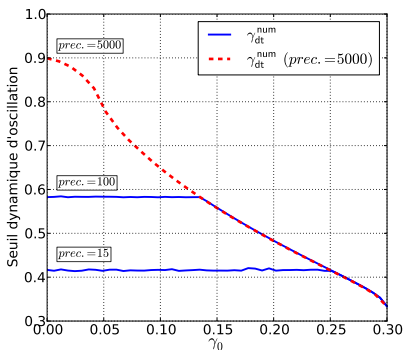
## Influence de la valeur initiale de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\gamma_0$  pour plusieurs précisions ( $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ )



## Influence de la valeur initiale de $\gamma$

$\gamma_{dt}^{num}$  vs.  $\gamma_0$  pour plusieurs précisions ( $\epsilon = 3 \cdot 10^{-4}$ )



**Propriété du seuil dynamique d'oscillation :**

- ⇒ RDB :  $\gamma_{dt}^{num}$  indépendant de  $\gamma_0$  ;
- ⇒ RIB :  $\gamma_{dt}^{num}$  diminue avec  $\gamma_0$  ;

## Résumé des observations

⇒ **Expériences & Simulations du modèle de "Raman" :**

- Seuil dynamique numérique et expérimental  $>$  Seuil statique

## Résumé des observations

⇒ **Expériences & Simulations du modèle de "Raman" :**

- Seuil dynamique numérique et expérimental > Seuil statique

⇒ **Simulations : Propriétés de  $\gamma_{dt}^{num} \implies 2$  régimes**

- Régime dépendant du bruit
- Régime Indépendant du bruit

# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
- 4 **Étude analytique du cas dynamique**
  - La théorie de la bifurcation dynamique
  - La courbe invariante
  - Prédiction de l'enveloppe
- 5 Conclusion

# Équations du système quand $\gamma$ augmente linéairement

⇒ La variation de  $\gamma$  est linéaire :  $\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$  ou  $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon$

⇒ Le paramètre  $\gamma$  varie lentement :  $\epsilon \ll 1$ .

## Cas Statique

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$



## Cas Dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

# Équations du système quand $\gamma$ augmente linéairement

⇒ La variation de  $\gamma$  est linéaire :  $\gamma_n = \epsilon n + \gamma_0$  ou  $\gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon$

⇒ Le paramètre  $\gamma$  varie lentement :  $\epsilon \ll 1$ .

## Cas Statique

$$p_n^+ = f(p_{n-1}^+)$$



## Cas Dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

Étude du système "dynamique" dans le cadre de la **théorie de la bifurcation dynamique** :

Seuil dynamique > Seuil statique : **Retard à la bifurcation**

[Baesens, "Slow sweep through a period-doubling cascade : Delayed bifurcation and renormalisation", *Physica D*, 1991.]



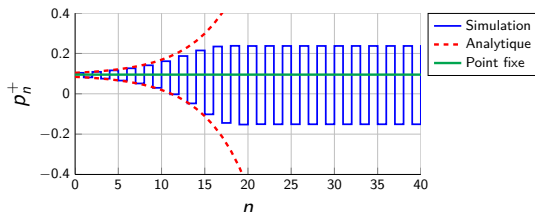
# Référence pour le calcul de l'enveloppe

## Cas statique

⇒ Référence  $\equiv$  point fixe  $p^{+*}$

⇒ Linéarisation du système autour de son point fixe  $p^{+*}$  ⇒ Expression de  $w = p^+ - p^{+*}$  au début du transitoire (naissance des oscillations) :

$$w_n \approx w_0 [f'(p^{+*})]^n .$$



⇒ Point fixe  $p^{+*}$  : **définition** :

$$p^{+*} = f(p^{+*})$$

Si le système est initialisé précisément sur le point fixe, il y reste indéfiniment

## Cas dynamique

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon \end{cases}$$

Quelle référence pour le calcul de l'enveloppe ?

⇒ Référence  $\equiv$  **courbe invariante**  $\phi_\epsilon(\gamma)$ .

Si le système est initialisé précisément sur la courbe invariante, il y reste indéfiniment :

---

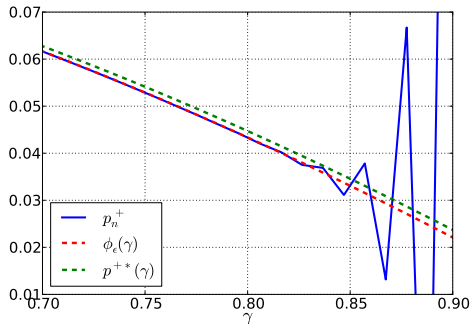

$$\begin{array}{ccc}
 n-1 & & n \\
 p_{n-1}^+ = \phi_\epsilon(\gamma_{n-1}) & \implies \text{Système dynamique} & \implies p_n^+ = \phi_\epsilon(\gamma_n)
 \end{array}$$


---

⇒ La courbe invariante  $\phi_\epsilon$  doit satisfaire :  $\phi_\epsilon(\gamma) = f(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma)$

**Remarque** : En dynamique la courbe des points fixes  $p^{+*}(\gamma)$  n'est plus la courbe invariante.

⇒ Courbe invariante  $\phi_\epsilon$  :  $\phi_\epsilon(\gamma) = f(\phi_\epsilon(\gamma - \epsilon), \gamma)$  ⇒ pas de solution exacte ⇒ solution approchée par méthode perturbative .



⇒ Linéarisation du système autour de la courbe invariante  $\phi_\epsilon$  ⇒ Expression analytique  $\hat{w}$  de l'écart à la courbe invariante  $p^+ - \phi(\gamma)$

⇒  $\hat{w}$  : prédiction du seuil d'oscillation dynamique.

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

⇒ Linéarisation du "système avec bruit"  
autour de  $\phi_\epsilon \Rightarrow$  Expression de  $\hat{w}_n$

$$\hat{w}_n = \sqrt{\underbrace{A_n}_{\text{RIB}} + \underbrace{B_n}_{\text{RDB}}}$$

⇒  $A_n$  décrit le Régime Indépendant du Bruit ;

⇒  $B_n$  décrit le Régime Dépendant du Bruit.

## Prise en compte du bruit dans le modèle

### Système sans bruit (Déterministe)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

### Système avec bruit (Stochastique)

$$\begin{cases} p_n^+ = f(p_{n-1}^+, \gamma_n) + \xi_n \\ \gamma_n = \gamma_{n-1} + \epsilon, \end{cases}$$

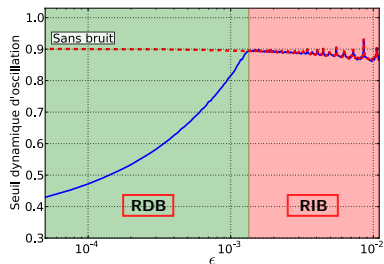
$\xi$  : bruit blanc de moyenne nulle et d'amplitude  $\sigma$

⇒ Linéarisation du "système avec bruit"  
autour de  $\phi_\epsilon \Rightarrow$  Expression de  $\hat{w}_n$

$$\hat{w}_n = \sqrt{\underbrace{A_n}_{\text{RIB}} + \underbrace{B_n}_{\text{RDB}}}$$

⇒  $A_n$  décrit le Régime Indépendant du Bruit ;

⇒  $B_n$  décrit le Régime Dépendant du Bruit.



⇒  $A_n \ll B_n$  : système évolue en RDB ;

⇒  $A_n \gg B_n$  : système évolue en RIB.

## Enveloppe pour le Régime Indépendant du Bruit

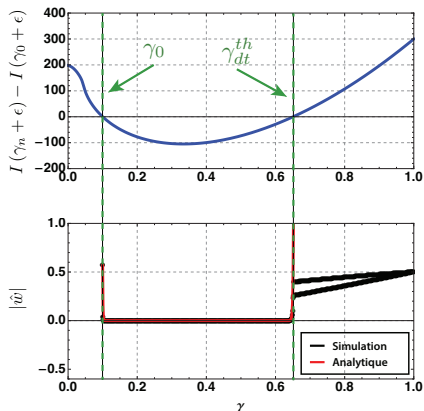
Traitement du terme  $A_n \Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\gamma_{dt}^{th}$

### Enveloppe pour le RIB

$(A_n \gg B_n)$  :

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{A_n} =$$

$$|\hat{w}_0| \exp [I(\gamma_n + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon)]$$



[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *Nonlinear dynamics*, 2013.]

## Enveloppe pour le Régime Indépendant du Bruit

Traitement du terme  $A_n \Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\gamma_{dt}^{th}$

### Enveloppe pour le RIB

$(A_n \gg B_n)$  :

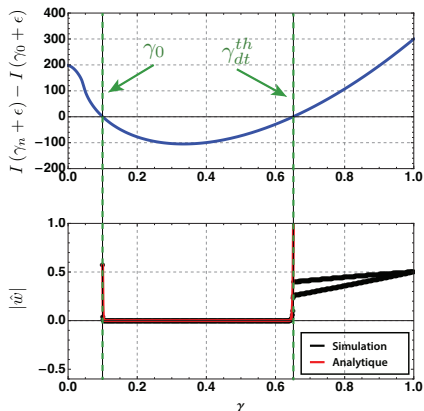
$$\hat{w}_n \approx \sqrt{A_n} =$$

$$|\hat{w}_0| \exp [I(\gamma_n + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon)]$$

Critère pour  $\gamma_{dt}^{th}$  :

$$I(\gamma_{dt}^{th} + \epsilon) - I(\gamma_0 + \epsilon) = 0$$

$I(\gamma)$  : intégrale non calculable analytiquement.



[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *Nonlinear dynamics*, 2013.]



## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB ( $A_n \ll B_n$ ) :**  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st} \Rightarrow I^{D.L.2}$ .

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st} \Rightarrow I^{D.L.2}$ .

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n} \approx \frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp [I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st})]$$

**Remarque** : valable uniquement après  $\gamma_{st}$

## Enveloppe pour le Régime Dépendant du Bruit

Traitement du terme B  $\Rightarrow$  expression théorique du seuil dynamique noté  $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$

**Enveloppe pour le RDB** ( $A_n \ll B_n$ ) :  $\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n}$

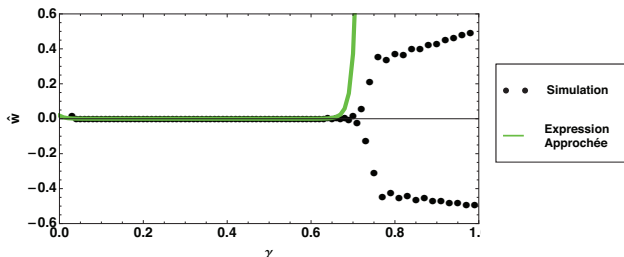
$B_n$  : expression faisant intervenir l'intégrale  $I$

**Simplification** : Le bruit diminue le seuil d'oscillation dynamique.

Développement limité à l'ordre 2 de  $I$  autour de  $\gamma_{st} \Rightarrow I^{D.L.2}$ .

$$\hat{w}_n \approx \sqrt{B_n} \approx \frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left( \frac{\pi}{K} \right)^{1/4} \exp \left[ I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st}) \right]$$

**Remarque** : valable uniquement après  $\gamma_{st}$

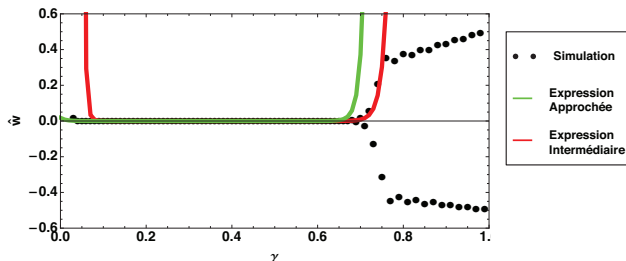


[Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear dynam.*, 2013.]

## Expression intermédiaire :

$$\hat{w}_n \approx \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4} \exp \left[ I^{D.L.2}(\gamma_n) - I^{D.L.2}(\gamma_{st}) \right]}_{\text{Expression approchée [1]}}$$

$$\Rightarrow \hat{w}_n \approx \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon^{1/4}} \left(\frac{\pi}{K}\right)^{1/4} \exp \left[ I(\gamma_n) - I(\gamma_{st}) \right]}_{\text{Expression intermédiaire [2]}}$$



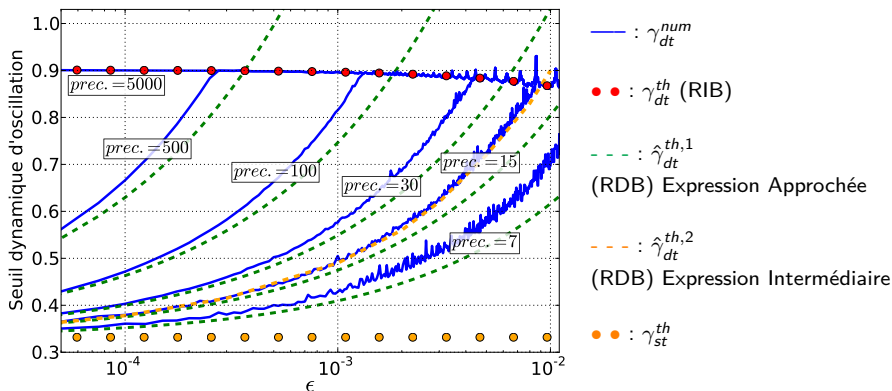
[1] [Bergeot et al., "Prediction of the dynamic oscillation threshold in a clarinet model with time-varying blowing pressure : influence of noise", *Nonlinear dynam.*, 2013.]

[2][Bergeot et al., "Estimation of the attack transient in a clarinet model with time-varying blowing pressure", *En cours d'écriture*, 2013.]

## Comparaison entre les seuil d'oscillation dynamiques théoriques $\gamma_{dt}^{th}$ (RID) et $\hat{\gamma}_{dt}^{th}$ (RDB) et le seuil dynamique numérique $\gamma_{dt}^{num}$

RIB :  $A_n \implies \gamma_{dt}^{th}$

RDB :  $B_n : \{\text{Expr. App.}; \text{Expr. Int.}\} \implies \{\hat{\gamma}_{dt}^{th,1}; \hat{\gamma}_{dt}^{th,2}\}$



# Sommaire

- 1 Introduction
- 2 État de l'art dans le domaine de l'acoustique musicale
- 3 Observations sur des systèmes maîtrisés
- 4 Étude analytique du cas dynamique
- 5 Conclusion**

- Point de départ : étude des transitoires d'attaque dans les clarinettes ;
- Focalisation sur l'influence de la variation de la pression dans la bouche sur la naissance des oscillations  $\Rightarrow$  Première étape importante ;

- 1<sup>ère</sup> Étape : Mise en évidence des phénomènes :

### **Notion de "seuil dynamique d'oscillation" :**

- Réinterprétation de résultats anciens de l'acoustique musicale [Atig et al., 2004] ;
  - Mesure du seuil statique : on comprend pourquoi il est si difficile de le mesurer en augmentant lentement la pression dans la bouche.
- 
- 2<sup>nde</sup> Étape : Expression analytique de l'enveloppe du son (étude "dynamique" du modèle de "Raman")
    - Utilisation des outils d'analyse de la théorie de la bifurcation dynamique ;
    - La courbe invariante : un outil précieux.
- 
- Enveloppe analytique  $\Rightarrow$  Prédiction du seuil d'oscillation dynamique :
    - Comparaison *quantitative* avec les simulations ;
    - Comparaison *qualitative* avec l'expérience.



**Merci de votre attention !**

- ⇒ Email : [baptiste.bergeot@centrale-marseille.fr](mailto:baptiste.bergeot@centrale-marseille.fr)
- ⇒ Articles et thèse disponibles sur HAL