

# **VIBRATIONS NON LINÉAIRES**

Introduction aux techniques de perturbation et éléments de base  
de la théorie des bifurcations

---

## **Notes de cours**

Baptiste BERGEOT  
[baptiste.bergeot@insa-cvl.fr](mailto:baptiste.bergeot@insa-cvl.fr)

**INSA Centre Val de Loire**  
5A GSI - *option* Ingénierie Mécanique et Conception  
et  
Master 2 *mention* Mécanique, Génie Civil, Matériaux, Structures

---

Version 1.3 (9 décembre 2025)



---

# Table des matières

<b>PREMIÈRE PARTIE. GÉNÉRALITÉS ET OUTILS D'ANALYSE</b>	<b>3</b>
<b>CHAPITRE 1. Introduction et résultats préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Généralités sur les systèmes mécaniques non linéaires . . . . .	5
1.1.1 Les non-linéarités matérielles . . . . .	6
1.1.2 Les non-linéarités géométriques . . . . .	6
1.1.3 Les non-linéarités de contact . . . . .	7
1.2 Exemples illustratifs . . . . .	8
1.2.1 Exemple 1 - Non-linéarités géométriques . . . . .	8
1.2.2 Exemple 2 - Réponse forcée d'un oscillateur cubique (oscillateur de Duffing) . . . . .	10
1.2.3 Exemple 3 - Oscillations auto-entretenues . . . . .	13
<b>CHAPITRE 2. Méthodes d'analyse</b>	<b>17</b>
2.1 Stabilité d'un point fixe d'un système dynamique . . . . .	17
2.1.1 Théorème de stabilité asymptotique . . . . .	17
2.1.2 Application à un système mécanique . . . . .	20
2.1.3 Bifurcations . . . . .	22
2.2 Méthodes perturbatives . . . . .	25
2.2.1 Analyse dimensionnelle . . . . .	25
2.2.2 Système étudié . . . . .	27
2.2.3 Méthode des perturbations « naïve » . . . . .	29
2.2.4 Méthode de Lindstedt-Poincaré . . . . .	33
2.2.5 Méthode des échelles (de temps) multiples . . . . .	34
2.2.6 Méthode de moyennage de Bogoliubov-Krylov . . . . .	40
<b>DEUXIÈME PARTIE. APPLICATIONS</b>	<b>45</b>
<b>CHAPITRE 3. Forçage harmonique de l'oscillateur de Duffing</b>	<b>47</b>
3.1 Équation du modèle . . . . .	47
3.2 Résonance primaire . . . . .	48
3.2.1 Réponse forcée . . . . .	48
3.2.2 Backbone curve . . . . .	53
3.3 Résonances secondaires . . . . .	55
3.3.1 Forçage fort loin de la résonance primaire . . . . .	55
3.3.2 Résonance super-harmonique $\Omega \approx \frac{1}{3}$ . . . . .	56
3.3.3 Résonance sous-harmonique $\Omega \approx 3$ . . . . .	59

---

<b>CHAPITRE 4. Oscillations auto-entretenues</b>	<b>63</b>
4.1 Amortissement négatif induit par le frottement . . . . .	63
4.1.1 Équation du modèle . . . . .	63
4.1.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale . . . . .	64
4.1.3 Solution analytique approchée par la méthode des échelles multiples . . . . .	64
4.2 Instabilité aéroélastique d'une aile d'avion . . . . .	69
4.2.1 Équations du modèle . . . . .	69
4.2.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale . . . . .	72
4.2.3 Étude des cycles limites par la méthode de moyennage . . . . .	73
<b>TROISIÈME PARTIE. ANNEXES</b>	<b>79</b>
<b>ANNEXE A. Rappels sur les oscillateurs linéaires</b>	<b>81</b>
A.1 Système à un degré de liberté . . . . .	81
A.1.1 Réponse libre . . . . .	81
A.1.2 Réponse forcée harmonique . . . . .	85
A.1.3 Principe de superposition . . . . .	88
A.2 Système à plusieurs degrés de liberté . . . . .	89
A.2.1 Modes de vibrations . . . . .	89
A.2.2 Principe de la décomposition modale . . . . .	91
A.2.3 Cas d'un système conservatif . . . . .	91
A.2.4 Cas d'un système dissipatif . . . . .	92
<b>ANNEXE B. Code Python pour le moyennage du modèle simplifié d'aile d'avion</b>	<b>95</b>
<b>ANNEXE C. Formules trigonométriques</b>	<b>99</b>
Bibliographie	101

---

# Présentation du cours

Ce cours est donné aux étudiants de 5<sup>e</sup> année de l'option Ingénierie Mécanique et Conception de l'INSA Centre Val de Loire et du Master de Mécanique en région Centre Val de Loire (Master mention Mécanique, Génie Civil, Matériaux, Structures). Il s'adresse en général aux étudiants en école d'ingénieur ou en Master de Mécanique désireux d'obtenir un cours introductif aux vibrations non linéaires.

Le Chapitre 1 permet de mettre en contexte le cours en présentant d'abord quelques généralités sur non-linéarités en mécanique. Il présente ensuite, à l'aide d'exemples, certaines propriétés propres aux systèmes vibratoires non linéaires qui seront étudiés en détails dans ce cours. Le Chapitre 2 détaille les techniques qui serviront à l'analyse des systèmes vibratoires non linéaires effectuées dans les chapitres qui suivent. Le forçage harmonique de l'oscillateur de Duffing est étudié dans le Chapitre 3. La résonance primaire est examinée en Section 3.2 et les résonances secondaires (super-harmonique et sous-harmonique) en Section 3.3. Le chapitre 4 est consacré à l'analyse de systèmes auto-oscillants. Le cas d'un amortissement négatif induit par le frottement est étudié en Section 4.1 et celui de l'instabilité aéroélastique d'une aile d'avion en Section 4.2.



---

---

PREMIÈRE PARTIE

---

## **Généralités et outils d'analyse**



# Introduction et résultats préliminaires

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Généralités sur les systèmes mécaniques non linéaires</b>	<b>5</b>
1.1.1	Les non-linéarités matérielles	6
1.1.2	Les non-linéarités géométriques	6
1.1.3	Les non-linéarités de contact	7
<b>1.2</b>	<b>Exemples illustratifs</b>	<b>8</b>
1.2.1	Exemple 1 - Non-linéarités géométriques	8
1.2.1.1	Réponse libre du pendule pesant	8
1.2.1.2	Système non linéarisable : déplacement transversal de deux ressorts linéaires	9
1.2.2	Exemple 2 - Réponse forcée d'un oscillateur cubique (oscillateur de Duffing)	10
1.2.2.1	Effets raidissant et amortissant	10
1.2.2.2	Résonances secondaires	12
1.2.3	Exemple 3 - Oscillations auto-entretenues	13
1.2.3.1	Généralités	13
1.2.3.2	Amortissement négatif induit par le frottement	14

---

## 1.1 Généralités sur les systèmes mécaniques non linéaires

---

Cette section est en grande partie rédigée à partir du manuscrit de l'habilitation à diriger des recherches d'Olivier Thomas [Tho11].

Il est plus simple de définir précisément un système linéaire, si bien qu'on définit souvent un système non linéaire comme un système qui n'est pas linéaire. Je rappelle ici deux définitions / propriétés d'un phénomène / système linéaire, intéressantes pour appréhender les études non linéaires proposées des ce cours.

**Définition 1.1.** Un phénomène est linéaire lorsque un changement de l'intensité de la cause produit un changement de l'effet dans les mêmes proportions.

Les systèmes non linéaires ont donc en général un comportement qui dépend de l'intensité du signal d'entrée. Par exemple, les fréquences particulières d'un système non linéaire (fréquences de résonance, fréquence d'oscillations libres) dépendent de l'amplitude de l'excitation.

D'un point de vue dynamique, si un système est linéaire, alors, pour un signal d'entrée sinusoïdal pur, le signal de sortie est sinusoïdal pur, de même fréquence. Ainsi, une propriété forte des systèmes linéaires

est de conserver le contenu fréquentiel du signal d'entrée en modifiant simplement son intensité. Cette propriété est perdue dans le cas des systèmes non linéaires. On obtient alors de la distorsion harmonique, des mouvements quasi-périodiques, voire du chaos.

En mécanique des solides on peut distinguer trois grands types de non-linéarités listées ci-dessous.

### 1.1.1 Les non-linéarités matérielles

C'est le cas de lois de comportement non linéaires de matériaux : la relation non linéaire entre les contraintes et les déformations (loi de Hooke non valable).

*Exemples :*

- **Les matériaux élasto-plastiques.** C'est le cas usuel de loi de comportement non linéaire. Le passage des déformations élastiques aux déformations plastiques correspond à une relation contrainte / déformations *non régulière*, les déformations plastiques obtenues sont *irréversibles* et se manifestent par un comportement *hystérotique*, trois caractéristiques non linéaires. La plupart des métaux présentent ce comportement, lorsque les contraintes dépassent leur limite élastique.
- **Les matériaux élastiques non linéaires.** Dans ce cas, les déformations sont parfaitement réversibles (c'est le caractère élastique) et régulières, mais c'est la relation contraintes / déformations qui est non linéaire. Ces matériaux sont aussi en général fortement dissipatifs. C'est le cas des élastomères (caoutchouc), par exemple.
- **Les alliages à mémoire de forme.** Ce sont des matériaux qui changent de phase métallurgique en fonction des contraintes et des déformations qui leur sont appliquées. La principale caractéristique non linéaire est que la relation contrainte / déformations présente une hystérosis et est non régulière.

### 1.1.2 Les non-linéarités géométriques

Lorsque les non-linéarités géométriques sont la seule source de non-linéarités, on les rencontre en pratique dans deux familles de systèmes :

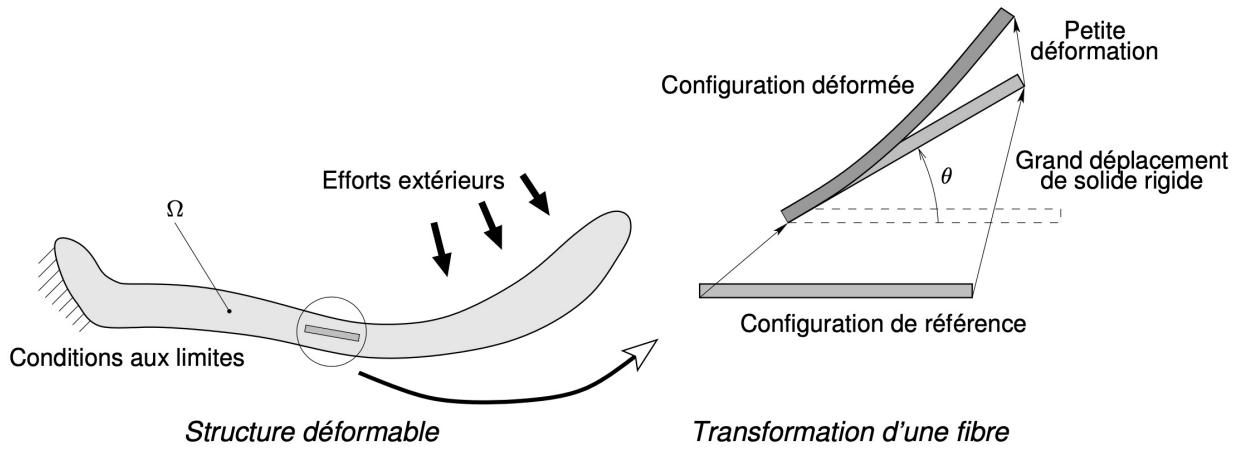
- **Les mécanismes en grands déplacements.** On regroupe dans cette famille tous les systèmes composés de solides rigides liés entre eux par des liaisons. Les non-linéarités proviennent de grandes rotations des composants du système les uns par rapport aux autres, qui créent des relations non linéaires entre les efforts de liaison et les déplacements des solides.

L'exemple le plus simple est le **pendule pesant** (cf. Sect. 1.2.1.1).

- **Les structures minces en grands déplacements.** Dans ce cas, il s'agit de la même cause de non-linéarité que pour les mécanismes : ce sont des rotations d'amplitude non négligeable des fibres déformables composant la structure qui créent des relations non linéaires entre les déplacements et les déformations des points de la structure (cf. Fig. 1.1). On associe plus généralement les non-linéarités géométriques aux structures minces à cause de leur faible rigidité transversale, qui permet des grands déplacements pour des efforts usuels modérés. À l'opposé, les structures plus massives sont trop rigides dans toutes les directions, ce qui empêche en pratique l'apparition de grands déplacements et donc la manifestation des non-linéarités géométriques.

D'un point de vue mathématique, les grandes rotations apparaissent sous la forme de fonctions sinus et cosinus qu'on ne peut pas linéariser comme dans un système linéaire. L'**oscillateur de Duffing** est une modélisation simplifiée d'un système présentant des non-linéarités géométriques (développements limités à l'ordre 3 un non 1 comme dans le cas linéaire).

Lorsque des non-linéarités matérielles de type élasto-plastique ou élastique non linéaire sont en jeu, elles sont souvent liées à des grands déplacements, si bien qu'il est nécessaire de considérer les non-linéarités matérielles avec les non-linéarités géométriques dans les calculs.

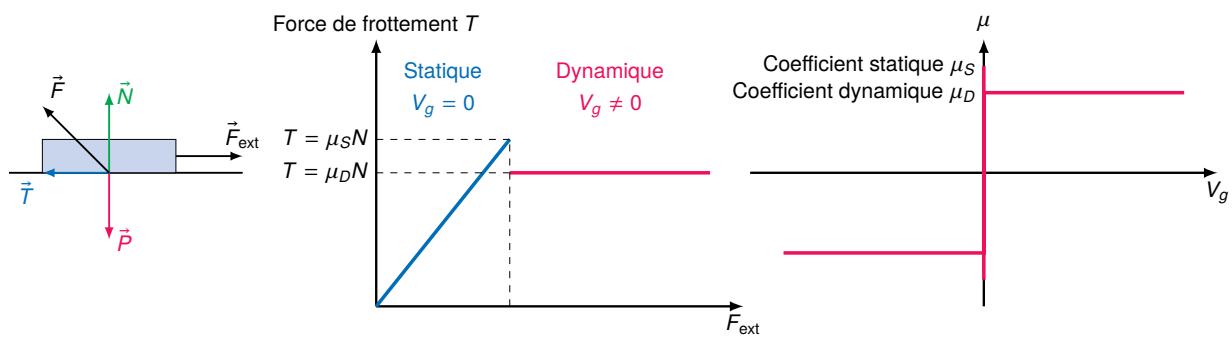


**FIGURE 1.1.** Illustration des non-linéarités géométriques (structures minces en grands déplacements). Chaque fibre du milieu continu est animé d'une transformation qui est la composée de (i) un mouvement de solide rigide d'amplitude quelconque (l'angle  $\theta$ ) et de (ii) une petite déformation par rapport à cette première transformation. Figure tirée de [Tho11].

### 1.1.3 Les non-linéarités de contact

Dans cette troisième famille, on classe toutes les non linéarités liées au contact entre solides. On distingue trois grandes familles de ce type de non-linéarité :

- **Le contact entre solides à travers une surface de dimensions réduite.** Dans ce cas, le déplacement d'un élément par rapport à l'autre et la force qui crée ce rapprochement sont en relation non linéaire. Ils sont prédicts en particulier par la théorie de Hertz. Les exemples technologiques les plus répandus sont les liaisons par éléments roulants (roulements à billes, roulements à rouleaux etc.) et les engrenages.
- **Le frottement sec.** Lorsque deux éléments d'un système sont en contact non lubrifié. Dans ce cas, on observe des alternances entre de l'adhérence et du glissement, qui crée une relation non régulière (et donc non linéaire) entre la force de frottement et la vitesse de glissement. Le modèle de Coulomb est largement utilisé pour décrire ces phénomènes (cf. Fig. 1.2).
- **Les contacts intermittents** entre deux éléments d'un système en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ces non-linéarités s'apparentent à des non-linéarités de choc.



**FIGURE 1.2.** Loi de frottement de Coulomb.

Un exemple industriel qui met en jeu toutes les non-linéarités de contact est le moteur d'avion : le guidage en rotation des arbres est réalisé par des paliers à roulements, le contact entre les pieds des

aubes et les disques se fait avec frottement sec et du contact intermittent est observé entre les têtes des aubes et le carter environnant.

Les sections qui suivent se concentrent essentiellement sur l'étude de systèmes vibratoires non linéaires dont les non-linéarités sont géométriques. Les grandes propriétés (phénomènes « signatures ») de ces derniers sont :

- **Distorsion harmonique** des oscillations
- **Dépendance des fréquences d'oscillations** libre en fonction de l'amplitude
- **Effets raidissant et amortissant**
- **Résonances secondaires**
- **Phénomène d'hystéresis**
- Réponses quasi-périodiques et chaotiques avec sensibilité aux conditions initiales
- **Échanges d'énergie entre modes et bifurcations**

Tout d'abords ces phénomènes (uniquement ceux indiqués en gras dans la liste ci-dessus) seront illustrés par des simulations numériques dans les exemples qui suivent, ils seront ensuite étudiés plus en détails dans les chapitres suivants.

## 1.2 Exemples illustratifs

### 1.2.1 Exemple 1 - Non-linéarités géométriques

#### 1.2.1.1 Réponse libre du pendule pesant

Le pendule pesant (cf. Fig. 1.3) est l'exemple type d'un oscillateur non linéaire. L'équation différentielle régissant son mouvement est la suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (1.1)$$

qui est une équation différentielle non linéaire à cause de la présence de la fonction sinus. Pour des petits angles, on peut utiliser le développement limité en zéro du sinus :

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \quad (1.2)$$

Des simulations numériques de (1.1) et de l'équation linéarisée correspondante (i.e.  $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ ) sont présentées en Fig. 1.4 pour trois différentes valeurs de l'amplitude angulaire initiale :  $\theta_0 = 0.1\pi$  rad,  $\theta_0 = 0.75\pi$  deg et  $\theta_0 = 0.95\pi$  deg. La vitesse angulaire initiale est à chaque fois égale à zéro. Ces simulations permettent d'illustrer les deux premières caractéristiques des oscillateurs non linéaires citées plus haut. Tout d'abords la distorsion harmonique car on observe en effet que le contenu fréquentiel en d'autant plus riche que l'amplitude initiale est élevée. Le contenu fréquentiel du système linéaire est le même quelque soit l'amplitude considérée ( $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ , ici  $\frac{g}{\ell} = 1$  et donc  $f \approx 0.16$  Hz). On observe également que la fréquence d'oscillations (celle correspondant au premier pic) du système non linéaire varie (ici diminue) avec l'amplitude d'oscillations.

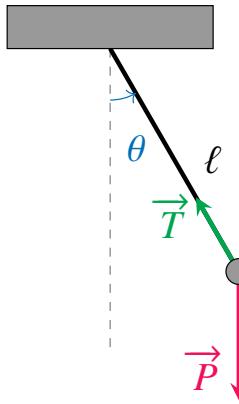
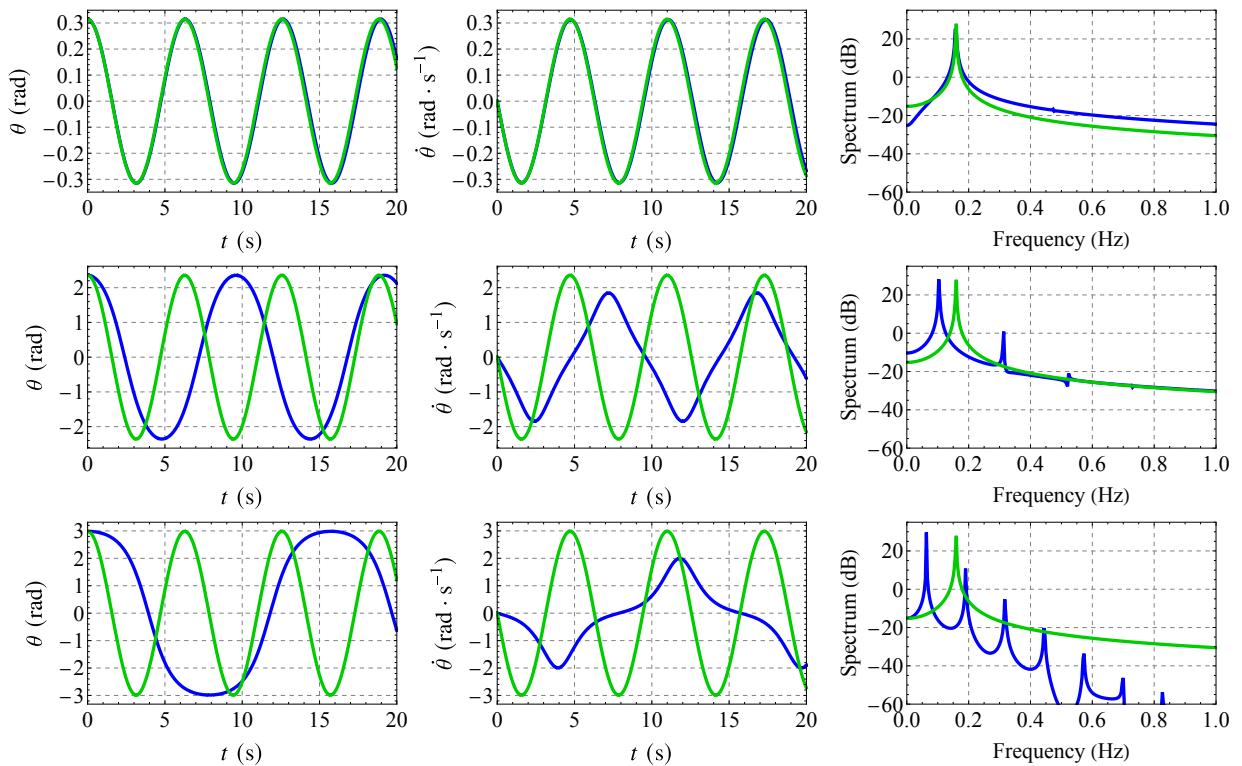


FIGURE 1.3. Pendule pesant.

FIGURE 1.4. Simulations numériques de (1.1) (bleu) et de l'équation linéarisée correspondante  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$  (vert). Première colonne : série temporelle de  $\theta$ ; deuxième colonne : série temporelle de  $\dot{\theta}$  et troisième colonne : périodogramme.

### 1.2.1.2 Système non linéarisable : déplacement transversal de deux ressorts linéaires

On considère le déplacement transversal deux ressorts linéaires de raideur  $k$  (cf. Fig. 1.5).

La force de rappel (linéaire) du ressort a pour norme  $\|\vec{F}\| = k|l - l_0|$ . Le principe fondamental de la dynamique projeté sur les axes de la base  $(\vec{e}_u, \vec{e}_w)$  s'écrit donc :

$$\vec{e}_u : \quad m\ddot{u} = -k(l - l_0) \cos \theta + k(l - l_0) \cos \theta = 0 \quad (1.3)$$

$$\vec{e}_w : \quad m\ddot{w} = -2k(l - l_0) \sin \theta \quad (1.4)$$

Par conséquent, si  $u(t = 0) = 0$  et  $\dot{u}(t = 0) = 0$  on a  $u(t) = 0$  (pas de mouvement de selon l'axe

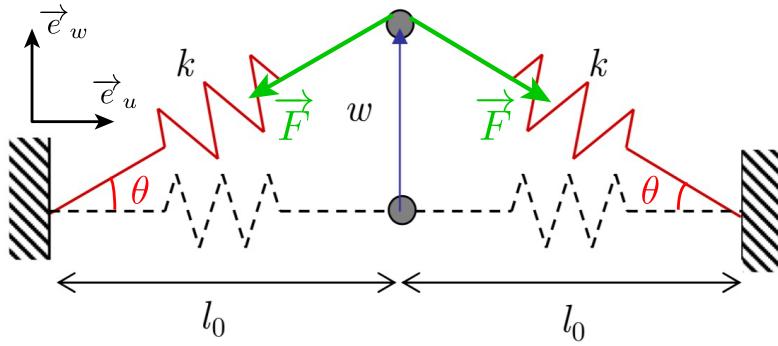


FIGURE 1.5. Déplacement transversal  $w$  de deux ressorts linéaires de raideur  $k$ .

$(O, \vec{e}_u)$ ). Comme  $l = \sqrt{l_0^2 + w^2}$  et  $\sin \theta = w / \sqrt{l_0^2 + w^2}$ , l'équations du mouvement selon  $(O, \vec{e}_w)$  devient

$$m\ddot{w} + 2k(l - l_0) \sin \theta = 0 \quad (1.5)$$

$$m\ddot{w} + 2k \left( \sqrt{l_0^2 + w^2} - l_0 \right) \frac{w}{\sqrt{l_0^2 + w^2}} = 0 \quad (1.6)$$

$$m\ddot{w} + 2kw \left( 1 - \frac{l_0}{l_0 \sqrt{1 + \left( \frac{w}{l_0} \right)^2}} \right) = 0 \quad (1.7)$$

On fait l'hypothèse que  $\frac{w}{l_0} \ll 1$ , par conséquent :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{w}{l_0} \right)^2}} = \left( 1 + \left( \frac{w}{l_0} \right)^2 \right)^{-1/2} = 1 - \left( \frac{w}{2l_0} \right)^2 - \left( \frac{3w}{8l_0} \right)^4 + \dots \quad (1.8)$$

et l'Eq. (1.7) devient

$$m\ddot{w} + \frac{k}{l_0^2} w^3 + \dots = 0 \quad (1.9)$$

qui est l'équation du mouvement d'un oscillateur **purement non linéaire ou non linéarisable**.

## 1.2.2 Exemple 2 - Réponse forcée d'un oscillateur cubique (oscillateur de Duffing)

### 1.2.2.1 Effets raidissant et amortissant

Les effets **raidissant** et **amortissant** sont illustrés en Fig. 1.6 qui représente la force de rappel d'un ressort linéaire ( $F(u) = -ku$ ) et d'un ressort dont la non-linéarité est raidissante (resp. amortissante), i.e. la raideur apparente est plus grande (resp. plus petite) que la raideur linéaire  $k$ . Une façon simple de modéliser ce phénomène est de rajouté une partie cubique à la force de rappel du ressort :  $F(u) = -ku - k_3u^3$  dans le cas raidissant et  $F(u) = -ku + k_3u^3$  dans le cas amortissant, avec  $k_3 > 0$  la **raideur cubique**.

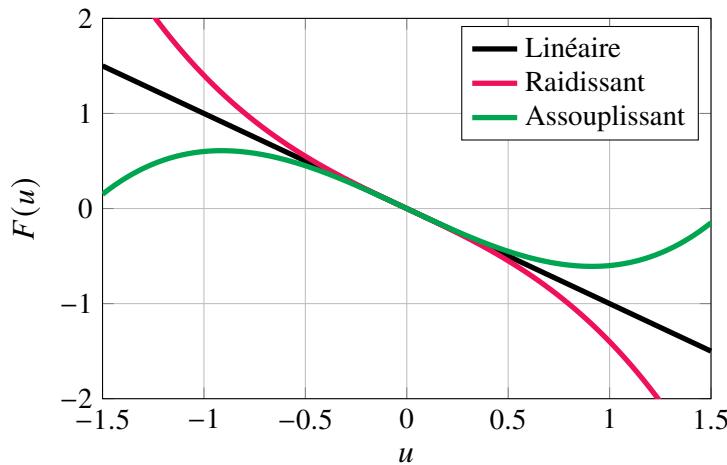
Le système masse-ressort-amortisseur, dont la force de rappel est non linéaire (ici cubique) est représenté en Fig. 1.7. En appliquant le PFD on obtient l'équation du mouvement suivante pour la masse  $m$  :

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u + \alpha u^3 = 0 \quad (1.10)$$

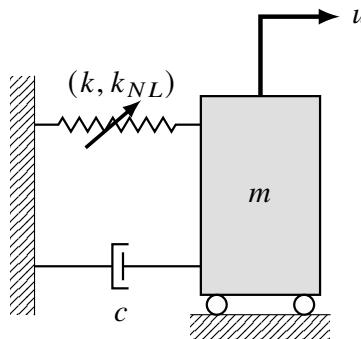
avec  $\alpha = k_3/m$ . L'Eq. (1.10) est appelée **équation de Duffing** (ou **oscillateur de Duffing**).

En ajoutant un forçage harmonique à (1.10) on obtient :

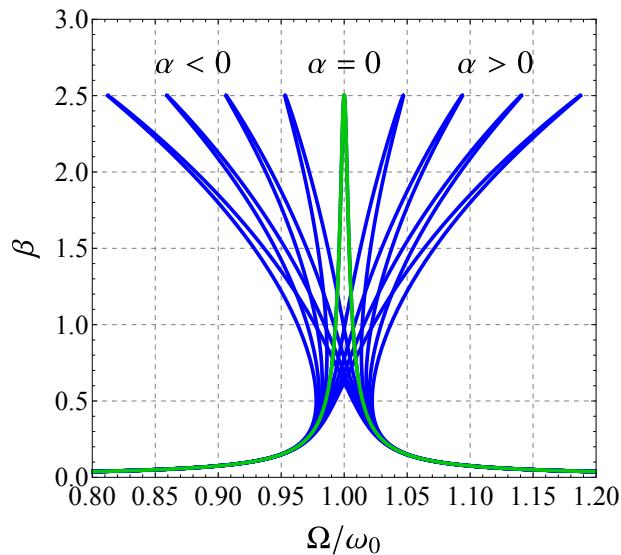
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u + \alpha u^3 = K \cos(\Omega t). \quad (1.11)$$



**FIGURE 1.6.** Force de rappel d'un ressort linéaire (ligne noire), d'un ressort dont la non-linéarité est raidissante (ligne rouge) et d'un ressort dont la non-linéarité est amortissante (ligne verte).



**FIGURE 1.7.** Système masse-ressort avec amortisseur visqueux et force de rappel non linéaire.

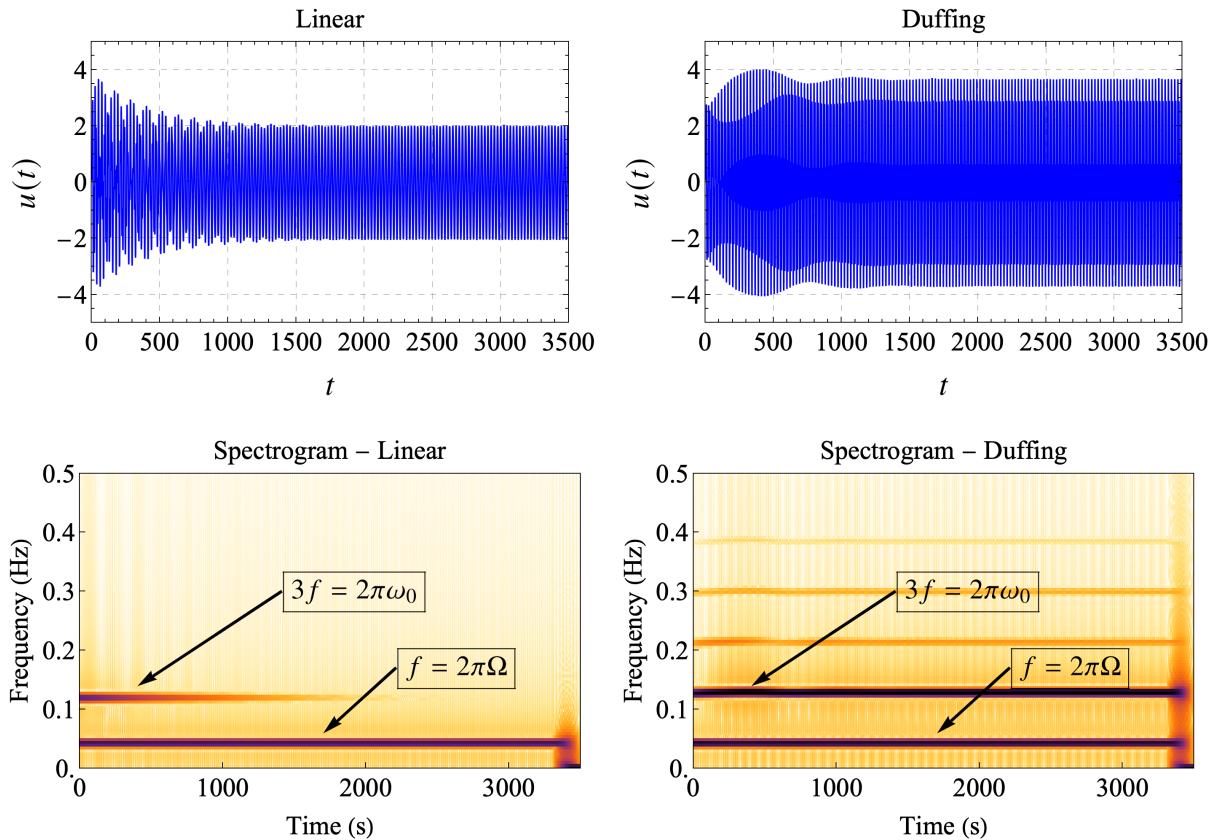


**FIGURE 1.8.** Réponse en fréquence d'un oscillateur de Duffing pour différente valeur de  $\alpha$ .

L'équation de Duffing<sup>1</sup>, du nom de Georg Duffing (1861–1944), est une équation différentielle non linéaire du second ordre utilisée pour modéliser certains oscillateurs amortis et forcés.

La réponse en fréquence de (1.10) est représentée en Fig. 1.8 pour différente valeur de  $\alpha$ . Les effets

1. C'est parfois l'Éq. (1.11), avec le forçage, qui est appelée équation de Duffing.



**FIGURE 1.9.** Illustration du phénomène de résonance super-harmonique. À gauche le cas linéaire et à droite le cas non linéaire. À chaque fois il y a en haut la série temporelle de  $u(t)$ , issue de l'intégration numérique de (1.11), et en bas le spectrogramme correspondant.

raidissant et amortissant sont aussi visibles sur ces courbes. La courbe de résonance en amplitude est « pliée » vers la droite (resp. vers la gauche) dans le cas raidissant (resp. assouplissant).

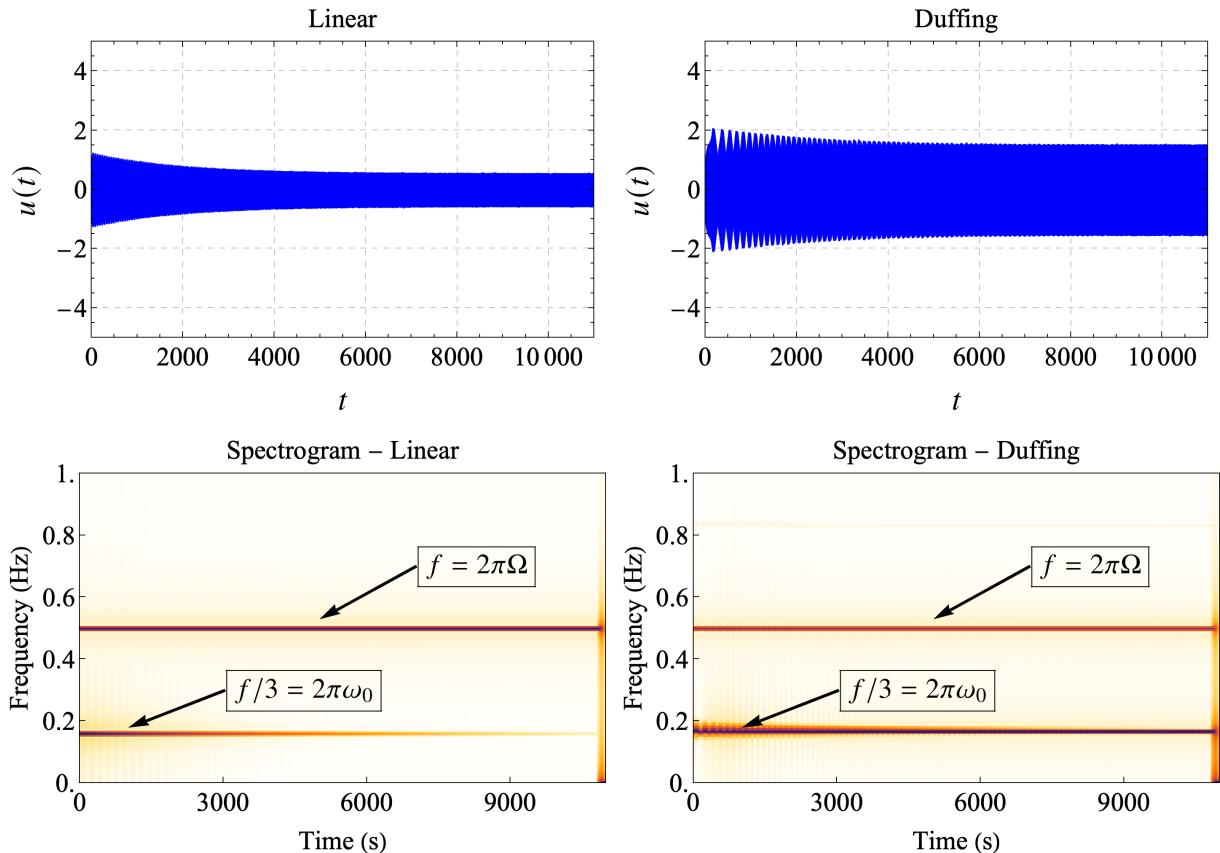
### 1.2.2.2 Résonances secondaires

Les simulations numériques qui suivent vont mettre en évidences un autre phénomène important pouvant apparaître quand un oscillateur non linéaire subit un forçage harmonique. Il s'agit de l'apparition de **résonances secondaires** qui subvient lorsque la fréquence de forçage est éloignée de la fréquence propre de l'équation linéaire associée. On appelle donc **résonance primaire** le phénomène de résonance observé quand la fréquence de forçage est proche de la fréquence propre de l'équation linéaire associée.

**Résonance super-harmonique (superharmonic resonance).** Dans le cas linéaire la résonance se produit aux alentours de  $\Omega = \omega_0$  (cf. Sect. A.1.2). La Fig. 1.9 illustre ce qui se passe quand

$$\Omega = \omega_0/3. \quad (1.12)$$

La figure représente, à gauche le cas linéaire et à droite le cas non linéaire. À chaque fois il y a en haut la série temporelle de  $u(t)$ , issue de l'intégration numérique de (1.11), et en bas le spectrogramme correspondant. Dans le cas linéaire, on observe un transitoire dans lequel la pulsation de forçage  $\Omega$  et la pulsation propre  $\omega_0 = 3\Omega$  sont présentes. La composante liée à la pulsation propre, qui correspond à la solution de l'équation homogène, s'éteint ensuite à cause de l'amortissement. Dans le cas non linéaire, les deux composantes persistent et on observe une amplitude des oscillations presque deux fois plus



**FIGURE 1.10.** Illustration du phénomène de résonance sous-harmonique. À gauche le cas linéaire et à droite le cas non linéaire. À chaque fois il y a en haut la série temporelle de  $u(t)$ , issue de l'intégration numérique de (1.11), et en bas le spectrogramme correspondant.

importante que dans le cas linéaire. Le système résonant à une fréquence supérieure (ici 3 fois) à la fréquence d'excitation, ce phénomène est appelé **résonance super-harmonique**.

**Résonance sous-harmonique (subharmonic resonance).** La Fig. 1.9 illustre ce qui se passe quand

$$\Omega = 3\omega_0. \quad (1.13)$$

Dans le cas linéaire, on observe un transitoire dans lequel la pulsation de forçage  $\Omega$  et la pulsation propre  $\omega_0 = \Omega/3$  sont présentes. La composante liée à la pulsation propre s'éteint ensuite à cause de l'amortissement. Comme précédemment, dans le cas non linéaire les deux composantes persistent et on observe une amplitude des oscillations presque deux fois plus importante que dans le cas linéaire. Le système résonant à une fréquence inférieure (ici 3 fois) à la fréquence d'excitation, ce phénomène est appelé **résonance sous-harmonique**.

### 1.2.3 Exemple 3 - Oscillations auto-entretenues

#### 1.2.3.1 Généralités

Les auto-oscillations correspondent à la génération et le maintien d'un mouvement périodique par une source d'énergie dépourvue de toute périodicité. En général, les auto-oscillations apparaissent par le biais d'une **instabilité de la position d'équilibre triviale** du système qui, à partir d'une petite perturbation de cette dernière, fait croître l'amplitude des oscillations jusqu'à saturation sur une **solution périodique** stable appelé **cycle limite**.

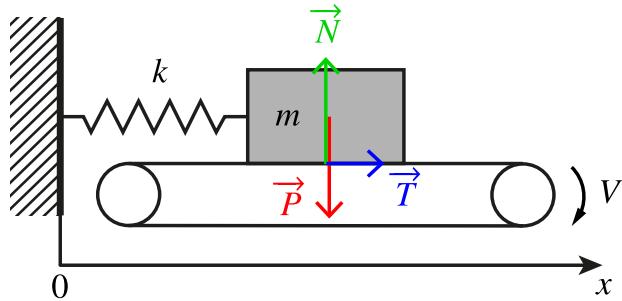
Il existe de nombreux phénomènes de ce type, les plus importants sont :

- Les **vibrations induites par frottement**, qui peuvent se produire lorsque les surfaces de frottement d'éléments tels que les pneus sur les pistes, les freins et les embrayages ont un coefficient de frottement qui tend à diminuer avec l'augmentation de la vitesse ou bien lorsque que le frottement crée un phénomène de **couplage de modes**.
- Les **instabilités aéroélastiques** (ou **flottement**). Le flottement est une instabilité dynamique d'une structure élastique dans un écoulement de fluide, il est provoqué par une rétroaction positive entre le mouvement du corps et la force exercée par l'écoulement du fluide. Ce phénomène peut se produire sur une aile d'avion, une pale d'hélicoptère ou d'éolienne ou même sur un pont (cf. pont de Takoma).
- Les **interactions rotor-oscillateur**. Résonance sol d'hélicoptère, couplage mât-pales dans les éoliennes.

Dans la section qui suit le phénomène d'oscillations auto-entretenues est illustré à l'aide d'un modèle générant des vibrations induites par frottement.

#### 1.2.3.2 Amortissement négatif induit par le frottement

Un modèle phénoménologique simple permettant de reproduire des vibrations induites par le frottement [SM55, PCH17, Her09] est présenté en Fig. 1.11.



**FIGURE 1.11.** Modèle phénoménologique simple permettant de reproduire des vibrations induites par le frottement.

L'équation du mouvement pour la masse  $m$  s'écrit sous la forme :

$$m\ddot{x} + kx = T \quad (1.14)$$

où  $T$  est la force de frottement. À l'équilibre (i.e.  $\ddot{x} = 0$  et  $\dot{x} = 0$ ) on a  $x_{eq} = T/k$ .

En notant  $V_g = V - \dot{x}$  la vitesse relative de glissement de la surface en mouvement par rapport au mobile et en prenant en compte en coefficient de frottement dynamique  $\mu_D$  fonction de  $V_g$ , on a selon la loi de Coulomb

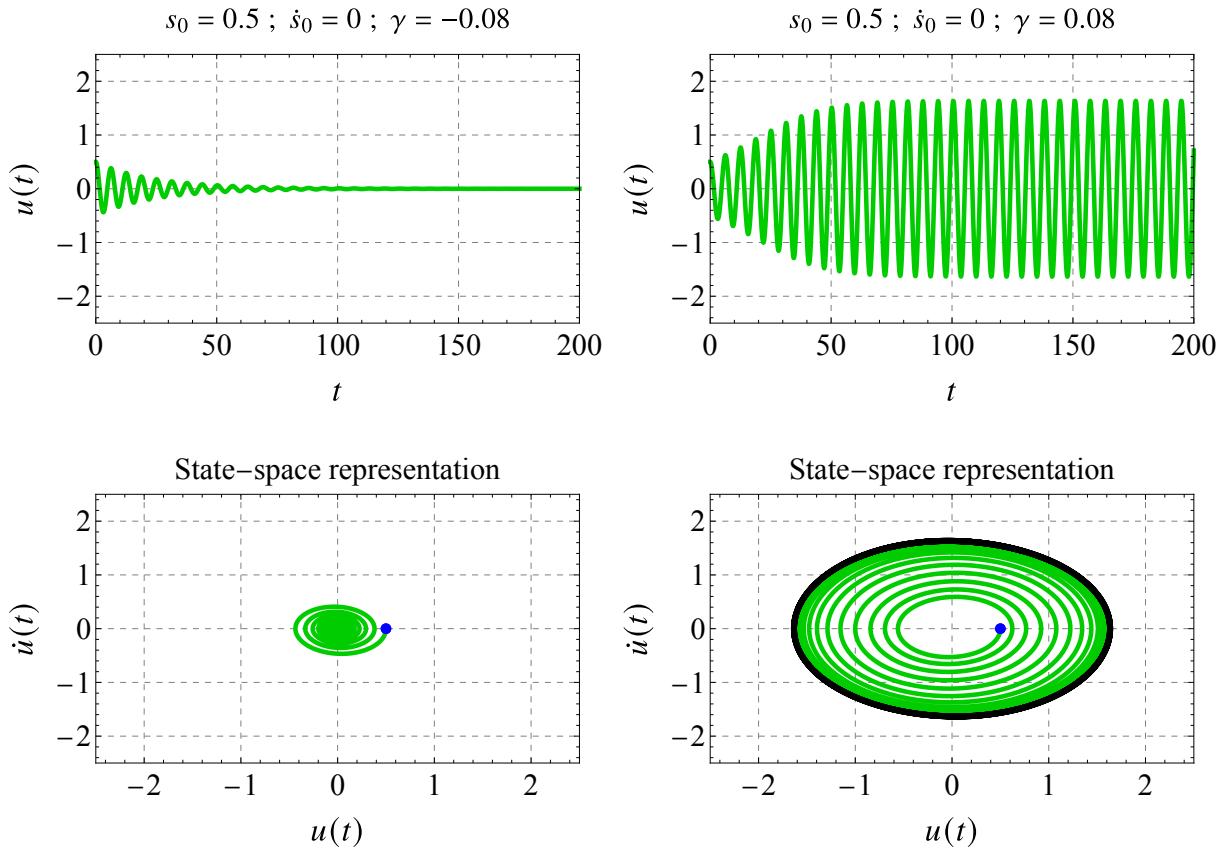
$$T = \mu_D(V_g)N = \mu_D(V - \dot{x})N \approx \left( \mu_D(V) - \frac{d\mu_D}{dV_g} \Big|_V \dot{x} - \frac{1}{2} \frac{d^2\mu_D}{dV_g^2} \Big|_V \dot{x}^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\mu_D}{dV_g^3} \Big|_V \dot{x}^3 \right) N \quad (1.15)$$

en considérant également une faible vitesse  $\dot{x}$ . Finalement, avec  $m = k = N = 1$  et en prenant en compte une loi de frottement telle que  $\frac{d\mu_D}{dV_g} \Big|_V = -2\gamma$ , ce qui indique que le coefficient de frottement diminue avec  $V_g$ ,  $\frac{d^2\mu_D}{dV_g^2} \Big|_V = 0$  et  $\frac{d^3\mu_D}{dV_g^3} \Big|_V = \alpha$ , puis en effectuant le changement de variable  $u = x - x_{eq} = x - \mu_D(V)N/k$ , l'équation du mouvement (1.14) devient :

$$\ddot{u} - 2\gamma\dot{u} + u + \alpha\dot{u}^3 = 0. \quad (1.16)$$

L'équation linéaire associée à (1.16) est

$$\ddot{u} - 2\gamma\dot{u} + u = 0, \quad (1.17)$$



**FIGURE 1.12.** Intégration numérique de (1.16) avec  $\gamma = -0.08$  à gauche,  $\gamma = 0.08$  à droite et  $\alpha = 0.04$ . En haut : Série temporelle. En bas : représentation dans l'espace des phases. Les trajectoires sont représentées en vert et, dans l'espace des phases, le cycle limite est représenté par une ligne noire et la condition initiale par un point bleu.

dont la forme générale de sa solution est donnée par (A.23), elle s'écrit :

$$u = e^{\gamma t} \left[ s_0 \cos(\omega_d t) + \frac{-\gamma s_0 + \dot{s}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (1.18)$$

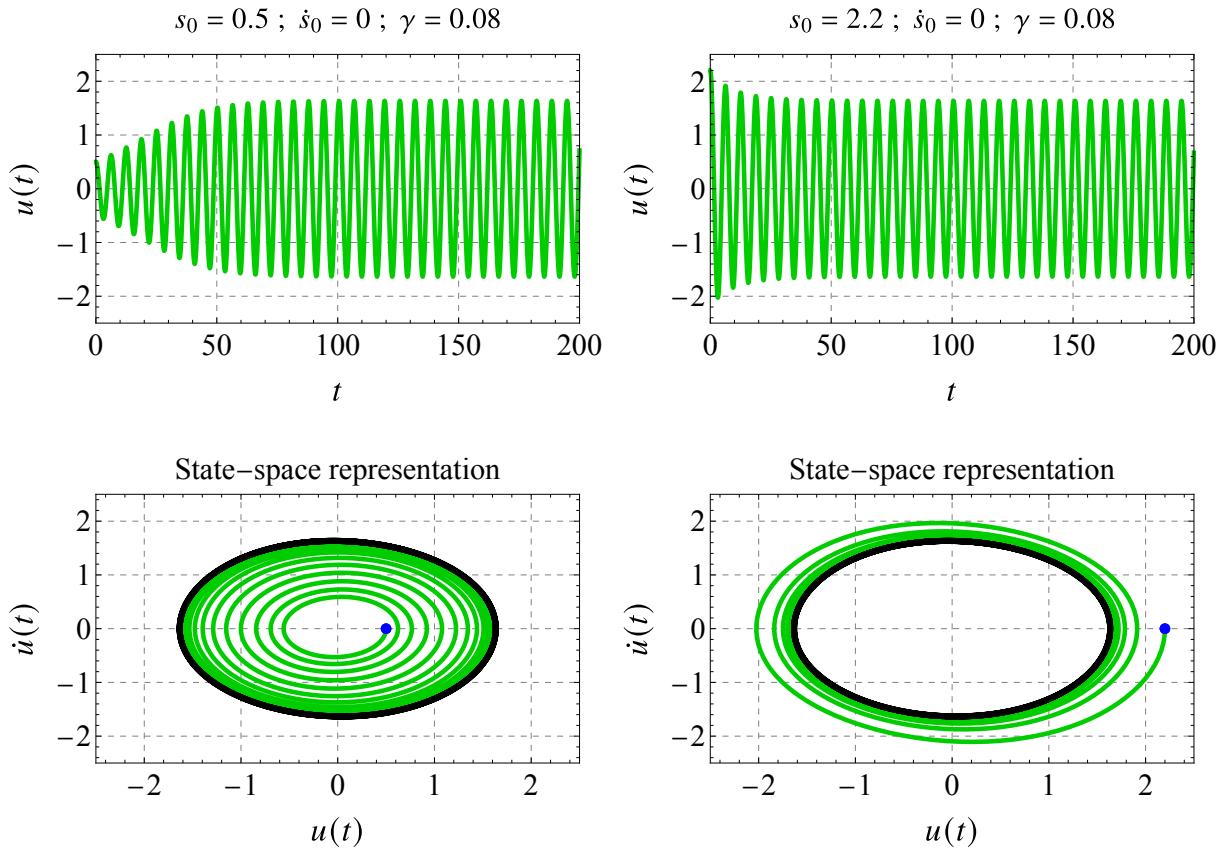
avec

$$\omega_d = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (1.19)$$

Si  $\gamma < 0$  (amortissement positif) on retrouve le cas courant d'oscillations amorties (cf. Sect. A.1.1.2). En revanche, si  $\gamma > 0$  (**amortissement négatif**) les oscillations croissent exponentiellement. C'est la présence de la non-linéarité qui permet au système de saturer sur un régime d'amplitude finie, appelé **Cycle Limite d'Oscillation** (CLO) ou juste **Cycle Limite**.

La Fig. 1.12 montre le résultat de l'intégration numérique de (1.16) avec  $\gamma = -0.08$  à gauche,  $\gamma = 0.08$  à droite et  $\alpha = 0.04$ . On observe bien la saturation sur un cycle limite dans le cas où  $\gamma > 0$  et la décroissance vers 0 dans le cas où  $\gamma < 0$ .

La Fig. 1.13 montre deux simulations avec  $\gamma > 0$  et met en évidence que le cycle limite est un attracteur, c'est dire qu'il attire vers lui la trajectoire du système : si, dans l'espace des phases, les conditions initiales sont à l'intérieur du CLO alors on observe une croissance exponentielle des oscillations puis une saturation sur le CLO (cf. Fig. 1.13 à gauche) ; par contre si, dans l'espace des phases, les conditions initiales sont à l'extérieur du CLO alors on observe une décroissance exponentielle des oscillations puis une saturation sur le CLO (cf. Fig. 1.13 à droite).



**FIGURE 1.13.** Intégration numérique de (1.16) avec  $\gamma = 0.08$  et  $\alpha = 0.04$ . En haut : Série temporelle. En bas : représentation dans l'espace des phases. À gauche conditions initiales sont à l'intérieur du CLO. À droite conditions initiales sont à l'extérieur du CLO. Les trajectoires sont représentées en vert et, dans l'espace des phases, le cycle limite est représenté par une ligne noire et la condition initiale par un point bleu.

**Remarque.** Le modèle précédent n'est valable que pour des oscillations de faible amplitude, c.-à-d.,  $|\dot{u}| < V$  durant lesquelles la masse est toujours en glissement. Dans le cas contraire un phénomène dit de *stick-slip* apparaît, correspondant une succession de phases de glissement *slip* et d'adhérence *stick* (voir par exemple [Her09], Section 1.2.1.).

# Méthodes d'analyse

## Sommaire

<b>2.1 Stabilité d'un point fixe d'un système dynamique</b> . . . . .	<b>17</b>
2.1.1 Théorème de stabilité asymptotique . . . . .	17
2.1.2 Application à un système mécanique . . . . .	20
2.1.3 Bifurcations . . . . .	22
2.1.3.1 Définitions générales . . . . .	22
2.1.3.2 Bifurcation de Hopf . . . . .	23
2.1.3.3 Bifurcation fourche . . . . .	25
<b>2.2 Méthodes perturbatives</b> . . . . .	<b>25</b>
2.2.1 Analyse dimensionnelle . . . . .	25
2.2.1.1 Exemple 1 : déterminer si un système est faiblement amorti . . . . .	26
2.2.1.2 Exemple 2 : déterminer si un système est faiblement non linéaire . . . . .	27
2.2.2 Système étudié . . . . .	27
2.2.3 Méthode des perturbations « naïve » . . . . .	29
2.2.4 Méthode de Lindstedt-Poincaré . . . . .	33
2.2.5 Méthode des échelles (de temps) multiples . . . . .	34
2.2.6 Méthode de moyennage de Bogoliubov-Krylov . . . . .	40

---

## 2.1 Stabilité d'un point fixe d'un système dynamique

### 2.1.1 Théorème de stabilité asymptotique

Il existe dans la littérature une multitude d'ouvrages sur la stabilité des systèmes dynamiques, cette section a été rédigée en grande partie à partir du livre de R. Seydel [Sey10]. Nous ne donnons ici que les résultats essentiels permettant d'appréhender l'étude des systèmes effectuée dans les chapitres qui suivent. Nous allons définir les notions de **stabilité** et de **stabilité asymptotique** et énoncer un théorème essentiel permettant de déterminer si un système dynamique est stable asymptotiquement ou instable, qui généralise la notion d'amortissement négatif déjà évoqué en Sect. 1.2.3.

Soit un système dynamique décrit dans l'espace des phases par le système d'équations différentiel du premier ordre suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

écrit ici sous forme vectorielle avec  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  sa condition initiale,  $\mathbf{x}^e$  une de ses **positions d'équilibre** (aussi appelées **points fixes**), solution de

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = \mathbf{0} \quad (2.2)$$

et  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  une fonction vectorielle non linéaire.

Nous souhaitons savoir comment va évoluer  $\mathbf{x}(t)$  partir de  $\mathbf{x}_0$  pour  $t > 0$ . En particulier, si la position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$  existe, va-t-on la rejoindre ou s'en éloigner ? Autrement dit,  $\mathbf{x}^e$  est-elle stable ou instable ?

**Définition 2.1** (Stabilité asymptotique). La position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$  est **asymptotiquement stable** si la réponse à une petite perturbation tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Plus formellement, cela s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e. \quad (2.3)$$

**Définition 2.2** (Stabilité). La position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$  est **stable** si la réponse à une petite perturbation reste petite lorsque le temps tend vers l'infini. Autrement, la position d'équilibre est dite instable (en s'en écarte). Certains auteurs parlent aussi de **stabilité de Liapunov** ou encore de **stabilité au sens de Liapunov**.

**Définition 2.3** (Bassin d'attraction). L'ensemble de toutes les valeurs initiales  $\mathbf{x}_0$  à partir desquelles les trajectoires convergent vers  $\mathbf{x}^e$  est appelé **bassin d'attraction** de  $\mathbf{x}^e$ .

Comme on peut le voir, la stabilité asymptotique implique la stabilité.

**Exemple 2.1.** Pour illustrer ces notions, raisonnons sur l'exemple très simple suivant à une dimension :

$$\dot{x} = \lambda x \quad (2.4)$$

avec  $x(0) = x_0$ . La position d'équilibre est  $x^e = 0$  et la solution est  $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ , par conséquent :  $x^e$  est stable si  $\lambda = 0$  (si  $x_0$  est petit), asymptotiquement stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$ .

**Remarque.** Étant donné que la distinction entre stabilité et stabilité asymptotique est souvent artificielle, nous utiliserons souvent le terme « stable » pour dire « asymptotiquement stable ».

La **matrice jacobienne** de  $\mathbf{f}$  au point  $\mathbf{x}$  est définie comme suit :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Le résultat général suivant sur la stabilité de la position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$  du système dynamique (2.1) est attribué à Liapunov en 1862 [LB66].

**Théorème 2.1** (Stabilité linéaire [LB66]). *Supposons que  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  soit deux fois continument dérivable et  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = 0$ . Les parties réelles des valeurs propres  $\lambda_j (j = 1, \dots, n)$  de la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  évaluée en  $\mathbf{x}^e$ , i.e.  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^e)$ , déterminent la stabilité comme suit :*

- (a) *L'équilibre  $\mathbf{x}^e$  est **stable** (asymptotiquement) si  $\forall i \in (1, \dots, n)$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ , et*
- (b) *L'équilibre  $\mathbf{x}^e$  est **instable** si  $\exists k \in (1, \dots, n)$   $\operatorname{Re}(\lambda_k) > 0$ .*

À noter que théorème précédent ne permet pas de conclure quant à la stabilité asymptotique d'une position d'équilibre **non hyperbolique** dont la définition est donnée ci-dessous.

**Remarque.** Les valeurs propres  $\lambda_i$  d'un système dynamique écrit au temps physique sont proportionnelles à l'inverse d'un temps. Ici le système étant écrit avec un temps adimensionné, les valeurs propres sont elles aussi sans dimension.

**Définition 2.4.** Une position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$  est **hyperbolique** si la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  évaluée en  $\mathbf{x}^e$ , i.e.  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^e)$ , n'a aucune valeur propre dont la partie réelle est nulle. Si l'une des valeur a une partie réelle nulle  $\mathbf{x}^e$  est **non hyperbolique**.

On peut éventuellement conclure sur la stabilité (au sens de Liupunov) si les conditions initiales sont petites.

*Démonstration.* On étudie l'écart à la position d'équilibre  $\mathbf{x}^e$ , pour cela un développement limité au premier ordre de (2.1) autour de  $\mathbf{x}^e$  est effectué. On obtient alors la version linéarisée de (2.1), soit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^e) + \mathbf{J}_f(\mathbf{x}^e)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^e). \quad (2.6)$$

En notant que par définition  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^e) = 0$  en introduisant  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}^e) = \mathbf{A}$  et  $\mathbf{y}$  tel que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^e. \quad (2.7)$$

l'Éq. (2.6) devient :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (2.8)$$

Soient les problèmes aux valeurs propres droite et gauche

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{R} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^T\mathbf{L} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}. \quad (2.9)$$

associés à (2.8). La matrice  $\mathbf{A}^T$  est la matrice transposée de  $\mathbf{A}$  et les matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$  sont définies de la façon suivante :

$$\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n] \quad \text{and} \quad \mathbf{L} = [\mathbf{l}_1 \dots \mathbf{l}_n] \quad (2.10)$$

avec  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) les vecteurs propres de  $\mathbf{A}$  (les vecteurs propres droits) et  $\mathbf{l}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) les vecteurs propres de  $\mathbf{A}^T$  (les vecteurs propres gauches). La matrice

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.11)$$

est la matrice qui porte les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  (qui sont aussi celles de  $\mathbf{A}^T$ )  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sur sa diagonale.

Les matrices  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{L}$  possèdent la propriété de biorthogonalité [Mei01] qui, si les matrices sont normalisées judicieusement, s'exprime ainsi :

$$\mathbf{L}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}_n, \quad (2.12)$$

et

$$\mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}. \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{I}_n$  est la matrice identité de dimension  $n \times n$ .

Nous allons diagonaliser (2.8) en introduisant les variables  $q_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) telles que :

$$\mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{q} \Leftrightarrow \mathbf{q} = \mathbf{L}^T \mathbf{y}, \quad (2.14)$$

avec

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T. \quad (2.15)$$

L'Éq. (2.8), après avoir été pré-multipliée par  $\mathbf{L}^T$ , s'écrit donc en fonction de  $\mathbf{q}$  comme  $\mathbf{L}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{q}$  qui, par (2.12) et (2.13), devient

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{q}. \quad (2.16)$$

La solution générale de (2.6) s'écrit donc

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^e + \mathbf{R} \mathbf{q} = \mathbf{x}^e + \sum_{i=0}^n \mathbf{r}_i q_{i,0} e^{\lambda_i t} \quad (2.17)$$

où  $q_{i,0} = q_i(0)$ .

L'expression (2.17) faisant intervenir une somme d'exponentielle on bien

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^e \quad \text{si} \quad \forall i \in (1, \dots, n), \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, \quad (2.18)$$

ce qui signifie que  $\mathbf{x}^e$  est asymptotiquement stable, et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{x}(t) = \pm \infty \quad \text{si} \quad \exists k \in (1, \dots, n), \operatorname{Re}(\lambda_k) > 0, \quad (2.19)$$

ce qui signifie que  $\mathbf{x}^e$  est instable. Dans ce dernier cas, le système étant linéaire il diverge vers l'infini, les non-linéarités se chargent de maintenir le système à une amplitude finie par l'apparition d'un cycle limite (cf. Fig. 1.12).

Pour terminer la démonstration, il faut faire appel au *théorème de Hartman-Grobman* [Wig90a] qui énonce qu'un système dynamique, au voisinage d'un équilibre hyperbolique, se comporte qualitativement de la même manière que le système linéarisé. ■

Pour de souligner le caractère local du critère de stabilité donné par le théorème 2.1, on parle également de **stabilité locale** ou de **stabilité linéaire**.

### 2.1.2 Application à un système mécanique

Soit un système mécanique non linéaire à  $N$  DDL décrit par les équations du mouvement suivantes :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T \quad (2.20)$$

écrites ici sous forme matricielle, avec  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  les matrice de masse, d'amortissement et de raideur respectivement.  $\mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}})$  est une fonction vectorielle non linéaire qui, de façon générale, agit à la fois sur la vitesse et le déplacement.

Le système (2.20) peut s'écrire dans l'espace des phases sous la forme  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  avec

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u} | \dot{\mathbf{u}})^T = (u_1, \dots, u_N, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_N)^T = (x_1, \dots, x_{2N})^T. \quad (2.21)$$

le **vecteur d'état** et

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

où

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{array} \right), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \left( \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \end{array} \right) \quad (2.23)$$

et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Ce qui permet d'utiliser le Théorème 2.1.

*Démonstration.* L'Éq. (2.20) se réécrit sous la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T \quad (2.24)$$

qui est équivalente à :

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \end{array} \right) \quad (2.25)$$

ce qui démontre le résultat précédent. ■

**Remarque.** Pour des **non-linéarités polynomiales** et si  $\mathbf{x}^e = \mathbf{0}$  (position d'équilibre dite **triviale**), les valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_f(\mathbf{0})$  sont directement les valeur propres de la matrice  $\mathbf{A}$

**Exemple 2.2.** Reprenons l'exemple du système frottant de la Sect. 1.2.3 dont l'équation du mouvement est :

$$\ddot{u} - 2\gamma\dot{u} + u + \alpha\dot{u}^3 = 0, \quad (2.26)$$

et dont la solution de l'équation linéaire associée (i.e.  $\ddot{u} - 2\gamma\dot{u} + u = 0$ ) s'écrit :

$$u = e^{\gamma t} \left[ s_0 \cos(\omega_d t) + \frac{-\gamma s_0 + \dot{s}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad \text{avec } \omega_d = \sqrt{1 - \gamma^2}. \quad (2.27)$$

On sait déjà, au vue de (2.27), que  $u = 0$  est une position d'équilibre stable (asymptotiquement) si  $\gamma < 0$  et instable si  $\gamma > 0$ .

Retrouvons maintenant ce résultat avec le théorème 2.1. On écrit d'abords (2.26) dans l'espace des phases en posant  $x_1 = u$  et  $x_2 = \dot{u} = \dot{x}_1$ , ce qui donne

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2, \quad (2.28a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2\gamma x_2 - \alpha x_2^3. \quad (2.28b)$$

dont la matrice jacobienne est :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\gamma - 3\alpha x_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

qui vaut, pour  $x_2 = 0$ ,

$$\mathbf{J}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\gamma \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

dont les valeurs propres sont complexes conjuguées et valent :

$$\lambda_1 = \gamma - j\sqrt{1 - \gamma^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \gamma + j\sqrt{1 - \gamma^2} \quad (2.31)$$

on a donc  $\lambda_2 = \lambda_1^*$  (i.e. complexe conjugué).

L'application du théorème 2.1 nous permet donc bien de conclure que la position d'équilibre triviale est stable (asymptotiquement) si  $\gamma < 0$  et instable si  $\gamma > 0$ .

**Remarque.** À noter, dans l'exemple ci-dessous, que **la partie imaginaire des valeur propres correspond à la pulsation**  $\omega_d$  calculée plus haut.

### 2.1.3 Bifurcations

#### 2.1.3.1 Définitions générales

Dans l'exemple 2.2, la variation du paramètre  $\gamma$  fait changer la nature stable ou instable de l'équilibre triviale et par conséquent la nature du **régime établi** de (2.26) : soit l'amplitude tend vers si l'équilibre est stable, soit un cycle limite se crée s'il est instable. Ce changement de nature du régime établi correspond ici à un changement du nombre de solution du problème ; on passe en effet d'une solution unique (la solution triviale) à deux solutions (la solution triviale et le cycle limite). Ce changement qualitatif dans les caractéristiques du système est appelé **bifurcation** et le paramètre  $\gamma$  est appelé **paramètre du bifurcation**.

**Définition 2.5** (Bifurcation, point de bifurcation, diagramme de bifurcation). Une **bifurcation** correspond à un changement qualitatif dans le comportement d'un système dynamique lorsque certains paramètres du système sont modifiés. Une bifurcation est en général associée à des changements dans la stabilité des solutions et à l'apparition (ou disparition) de solution. La valeur particulière de ce dernier pour laquelle la bifurcation se produit est appelée **point de bifurcation** ( $\gamma = 0$  dans l'exemple précédent). Finalement, on appelle **diagramme de bifurcation** le diagramme qui représente, un fonction d'un paramètre de bifurcation, les solutions d'un système et leur stabilité.

Le cas particulier précédemment évoqué (exemple 2.2) d'une bifurcation dans laquelle une position d'équilibre d'un système dynamique perd sa stabilité avec apparition d'une solution périodique (ou cycle limite) est appelée **bifurcation de Hopf**.

**Définition 2.6** (Bifurcation de Hopf). Une bifurcation de Hopf correspond au cas où une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour de la position d'équilibre d'un système dynamique franchissent l'axe imaginaire du plan complexe (i.e. les parties réelles deviennent positives).

**Définition 2.7** (Bifurcation de Hopf super-critique et sous-critique ([Sey10], Chap. 2)). Quand le cycle limite, qui apparaît à la bifurcation, est stable et « entoure » la partie instable de la branche des solutions d'équilibre, la bifurcation de Hopf est dite **super-critique** (*supercritical* en anglais). Quand le cycle limite est instable et « entoure » la partie stable de la branche des solutions d'équilibre, la bifurcation de Hopf est dite **sous-critique** (*subcritical* en anglais).

Dans l'exemple 2.2 la bifurcation est super-critique. Une analyse plus détaillée de la bifurcation de Hopf est proposée en Sect. 2.1.3.2 dans le cadre des instabilités aéroélastiques (cf. Sect. 4.2), une instabilité causée par une bifurcation de Hopf est appelé **instabilité de flottement** (*flutter instability* en anglais) et de **galop** (*galloping instability* en anglais).

Un autre type de bifurcation que nous allons rencontrer dans la suite est la **bifurcation Pitchfork** (ou fourche).

**Définition 2.8** (Bifurcation fourche). Dans le cas d'une bifurcation fourche les valeurs propres de la matrice jacobienne sont réelles, devenant positives à la bifurcation.

Dans ce cas, il n'y a pas d'oscillation et le système passe d'un point fixe à trois points fixes. Une analyse plus détaillée de la bifurcation Pitchfork est proposée en Sect. 2.1.3.3. Cette bifurcation peut également être super-critique et sous-critique. Dans le cadre des instabilités aéroélastiques une instabilité causée par une bifurcation de ce type est appelé **instabilité de divergence** (*divergence instability* en anglais). Le flambement d'une poutre droite correspond aussi à une bifurcation de type fourche.

### 2.1.3.2 Bifurcation de Hopf

En théorie des bifurcations, une **bifurcation de Hopf** ou de Poincaré-Andronov-Hopf, des noms de Henri Poincaré, Eberhard Hopf, et Aleksandr Andronov, est une bifurcation locale dans laquelle un point fixe d'un système dynamique perd sa stabilité tandis qu'une paire de valeurs propres complexes conjuguées de la linéarisation autour du point fixe franchissent l'axe imaginaire du plan complexe (i.e. les parties réelles deviennent positives).

La **forme canonique**<sup>1</sup> (ou **normale**) d'une bifurcation de Hopf est :

$$\dot{x} = \mu x - \omega(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) \quad (2.32a)$$

$$\dot{y} = \omega(\mu)x + \mu y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) \quad (2.32b)$$

où  $\mu$  est le paramètre de bifurcation considéré. La matrice jacobienne de (2.32), calculée à la positions d'équilibre triviale, a deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda(\mu) = \mu \pm j\omega(\mu). \quad (2.33)$$

La position d'équilibre triviale est donc stable si  $\mu < 0$  et instable si  $\mu > 0$ .

Passons maintenant en coordonnées polaire  $(r, \theta)$  en posant  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  et donc  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .  $r$  caractérise donc l'amplitude de  $x$  et  $y$  et  $\theta$  leur phase. L'Eq. (2.32) devient :

$$\dot{r} = \mu r + a(\mu)r^3 \quad (2.34a)$$

$$\dot{\theta} = \omega(\mu) + b(\mu)r^2 \quad (2.34b)$$

Un cycle limite de (2.32) (ou de (2.34)) est caractérisé par une un amplitude  $r$  constante ( $\dot{r} = 0$ ) quelque soit la phase  $\theta$  ( $\dot{\theta} \neq 0$ ). Donc pour déterminer le cycle limite il faut trouver les solutions non triviales de  $\dot{r} = 0$  uniquement. On trouve après calcul :

$$r^e = \sqrt{-\frac{\mu}{a}} \quad (2.35)$$

Si  $r = r^e$  alors la phase s'obtient en résolvant (2.34b) :

$$\theta = \left( \omega + br^{e^2} \right) t + \theta_0 \quad (2.36)$$

et donc le cycle limite est déterminé par :

$$x = r^e \cos \left[ \left( \omega + br^{e^2} \right) t + \theta_0 \right] \quad \text{et} \quad y = r^e \sin \left[ \left( \omega + br^{e^2} \right) t + \theta_0 \right]. \quad (2.37)$$

Deux cas se dégagent de (2.35) :

1. C'est la forme la plus simple possédant les propriétés de la bifurcation considérée, ici de Hopf.

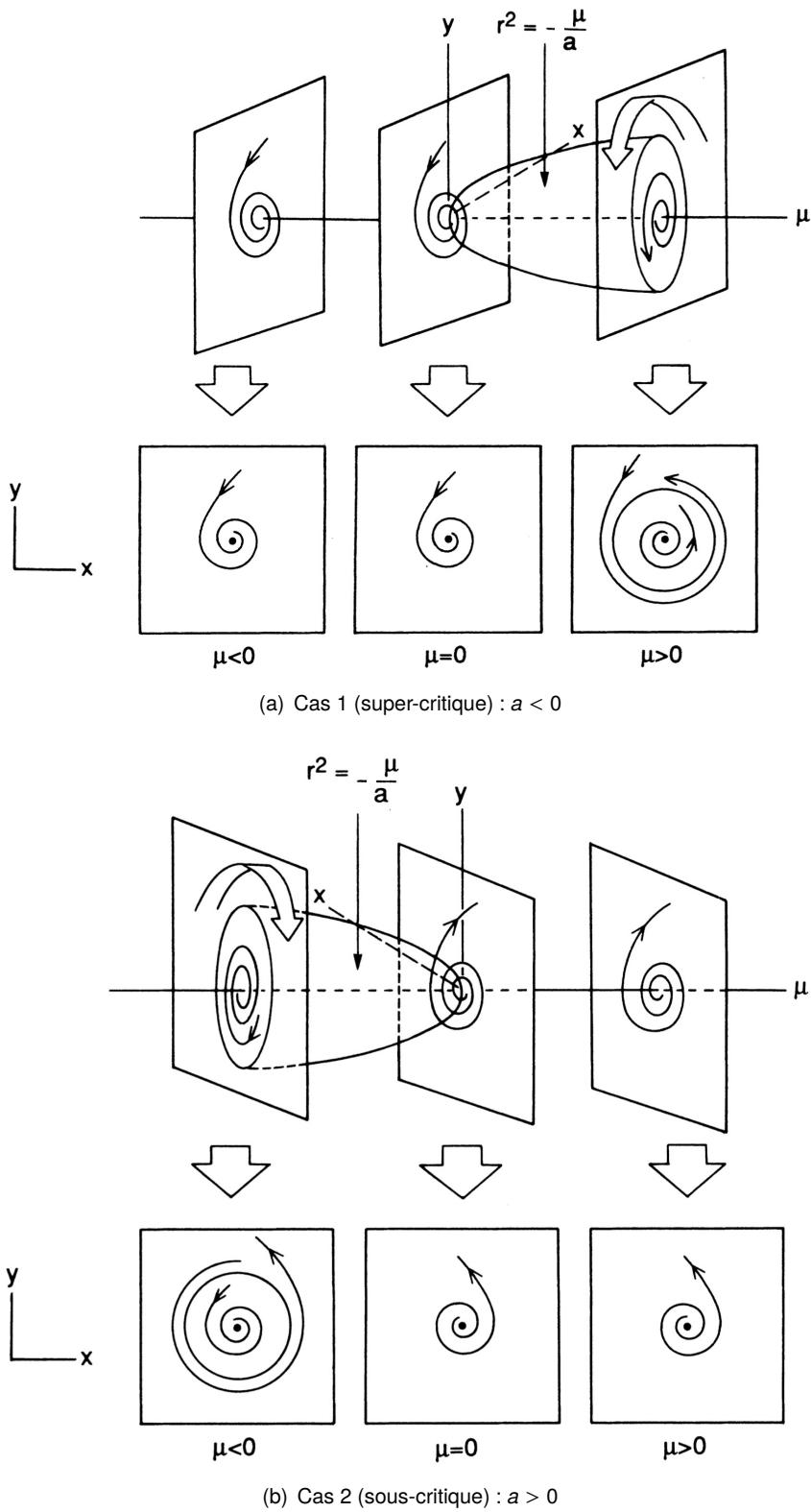


FIGURE 2.1. Bifurcation de Hopf (a) super-critique et (b) sous-critique. Figures tirées de [Wig90b].

**Cas 1 :  $a < 0$ .** Dans ce cas  $r^e$  existe si  $\mu > 0$

**Cas 2 :  $a > 0$ .** Dans ce cas  $r^e$  existe si  $\mu < 0$

Pour connaître la stabilité de  $r^e$ , il suffit de savoir si après une petite perturbation autour de ce dernier la trajectoire du système tend à retourner vers le point fixe ou bien à s'en écarter, et ceux indépendamment

de la phase  $\theta$ . L'étude de (2.34a) est donc suffisante. Dans ce cas, la matrice jacobienne de (2.34) se réduit à

$$\frac{d}{dr} (\mu r + a(\mu)r^3) = \mu + 3ar^2 \quad (2.38)$$

qui, calculée en  $r^e = \sqrt{-\mu/a}$ , vaut  $-2\mu$ . Par conséquent  $r^e$  est stable dans le cas 1 (cas dit **super-critique**, cf. Fig. 2.1(a)) et instable dans le cas 2 (cas dit **sous-critique**, cf. Fig. 2.1(b)).

### 2.1.3.3 Bifurcation fourche

Les bifurcations « **fourche** » (en anglais : *pitchfork*) correspondent au fait qu'un équilibre stable se déstabilise en un équilibre instable, et deux équilibres stables sont créés. Comme dans le cas de la bifurcation de Hopf, cette transition (i.e. la bifurcation) peut se faire de façon super-critique ou sous-critique.

La forme canonique de la bifurcation Pitchfork est :

$$\dot{x} = f(x) = \mu x + ax^3 \quad (2.39)$$

Ici la matrice jacobienne se réduit à :

$$\frac{df}{dx} = \mu + 3ax^2 \quad (2.40)$$

qui, évaluée en  $x = 0$ , vaut  $\frac{df}{dx} \Big|_{x=0} = \mu$ . La position d'équilibre triviale est donc stable si  $\mu < 0$  et instable si  $\mu > 0$ .

En plus du point fixe trivial, l'Eq. (2.39) a deux positions d'équilibre

$$x_{1/2}^e = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{a}}. \quad (2.41)$$

et donc

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_{1/2}^e} = -2\mu. \quad (2.42)$$

Comme pour la bifurcation de Hopf, deux cas se dégagent des équations précédentes :

**Cas 1 :**  $a < 0$ . Dans ce cas  $x_1^e$  existe si  $\mu > 0$  et est **stable**. Cas **super-critique**, cf. Fig. 2.2(a).

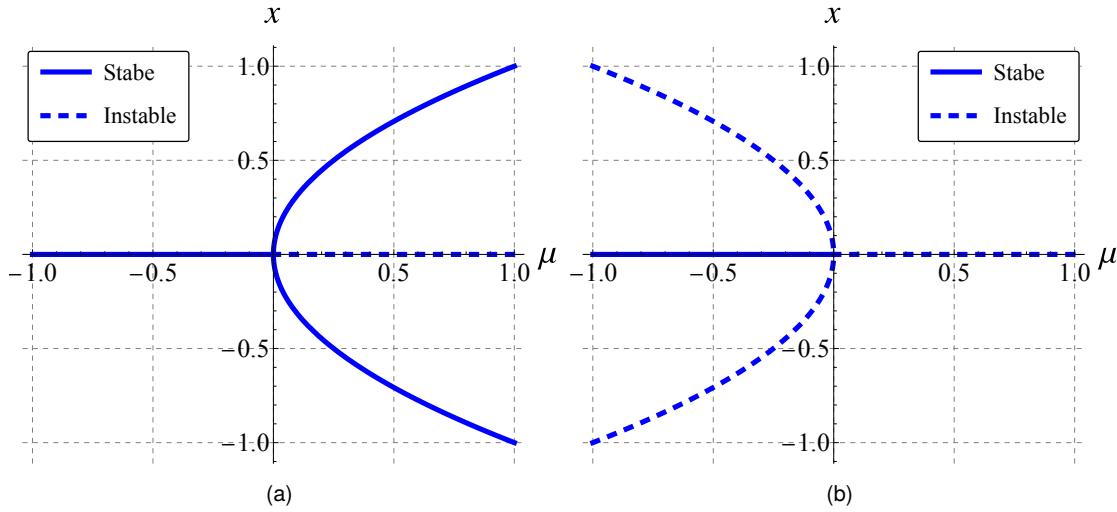
**Cas 2 :**  $a > 0$ . Dans ce cas  $r^e$  existe si  $\mu < 0$  et est **instable**. Cas **sous-critique**, cf. Fig. 2.2(b)

## 2.2 Méthodes perturbatives

Cette section a été rédigée à partir des ouvrages de références suivants : [Bus18, NM07, Nay11, Wig90c].

### 2.2.1 Analyse dimensionnelle

L'une des clés permettant de résoudre les problèmes mécaniques est la modélisation mathématique. Ce processus consiste à conserver certains éléments, à en négliger certains et à en approximer d'autres. Pour effectuer cette étape importante, il faut décider de l'ordre de grandeur (c'est-à-dire la petiteur ou la grandeur) des différents éléments du système en les comparant les uns aux autres mais aussi aux éléments de base du système. Ce processus est appelé **adimensionnement** (*nondimensionalization* en anglais) et consiste à rendre les **variables sans dimension** (*dimensionless* en anglais). Par conséquent, il faut toujours introduire des variables sans dimension avant de tenter de faire des approximations. Par exemple, si un élément a une longueur d'un centimètre, cet élément serait-il grand ou petit ? On ne peut pas répondre à cette question sans connaître le problème envisagé. Si le problème implique le mouvement



**FIGURE 2.2.** Diagramme de bifurcation d'une bifurcation Pitchfork (a) super-critique et (b) sous-critique.

d'un satellite sur une orbite autour de la Terre, alors un centimètre est extrêmement petit. En revanche, si le problème implique des distances intermoléculaires, alors un centimètre est extrêmement grand. De même, un gramme est-il petit ou grand ? Encore une fois, un gramme est extrêmement petit par rapport à la masse d'un satellite, mais est extrêmement grand par rapport à la masse d'un électron. Par conséquent, l'expression des équations sous une forme sans dimension fait ressortir les paramètres sans dimension importants qui régissent le comportement du système. Même si l'on ne s'intéresse pas aux approximations, il est recommandé d'effectuer cette étape importante avant d'analyser le système ou de présenter des données expérimentales.

Pour illustrer le processus d'adimensionnement, deux exemples sont donnés dans la suite.

#### 2.2.1.1 Exemple 1 : déterminer si un système est faiblement amorti

On considère un système masse-ressort-amortisseur dont les paramètres sont  $(m, k, \mu)$  dont l'équation du mouvement est :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku = 0 \quad (2.43)$$

où  $u$  est le déplacement de la masse  $m$ . On suppose les conditions initiales suivantes pour le déplacement et la vitesse :

$$u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt}(0) = 0. \quad (2.44)$$

Pour savoir rigoureusement si ce système est faiblement amorti il doit être adimensionné. Le déplacement  $u$  peut être rendu sans dimension en utilisant le déplacement initial  $u_0$  comme distance caractéristique et le temps  $t$  peut être rendu sans dimension en utilisant l'inverse de la pulsation propre du système  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Les grandeurs sans dimension suivantes sont donc introduites :

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \omega_0 t. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.45), l'équation du mouvement (2.43) devient :

$$m\omega_0^2 u_0 \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \mu\omega_0 u_0 \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + ku_0 \tilde{u} = 0 \quad (2.46)$$

ou encore

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \tilde{\mu} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \tilde{u} = 0 \quad (2.47)$$

avec

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{m\omega_0} = \frac{\mu}{\sqrt{km}}. \quad (2.48)$$

Quant aux conditions initiales (2.44) elles s'écrivent :

$$\tilde{u}(0) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}(0) = 0. \quad (2.49)$$

Ainsi, la solution au problème ne dépend que du seul paramètre  $\tilde{\mu}$ , s'il est petit, alors on peut l'utiliser comme petit paramètre pour obtenir une solution approchée du problème, et nous parlons d'un système faiblement amorti. Il est important de noter que le système ne peut pas être considéré comme faiblement amorti simplement parce que  $\mu$  est petit, c'est le paramètres sans dimension  $\tilde{\mu} = \mu/m\omega_0 = \mu/\sqrt{km}$  qui doit être petit.

### 2.2.1.2 Exemple 2 : déterminer si un système est faiblement non linéaire

Dans cette exemple on considérer un système masse-ressort-amortisseur dont le ressort possède une raideur cubique raidissante. L'équation du mouvement de la masse  $m$  a donc la forme suivante :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku + k_3 u^3 = 0 \quad (2.50)$$

avec toujours (2.44) comme conditions initiales.

En utilisant le même adimensionnement que dans l'exemple précédent (cf. Eq. (2.45)) on arrive à l'équation suivante :

$$mu_0\omega_0^2 \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \mu u_0\omega_0 \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + ku_0\tilde{u} + k_3 u_0^3 \tilde{u}^3 = 0 \quad (2.51)$$

où

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} + \tilde{\mu} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \tilde{u} + \epsilon \tilde{u}^3 = 0 \quad (2.52)$$

avec

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{m\omega_0} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{k_3 u_0^2}{k}. \quad (2.53)$$

Le système est dit faiblement non linéaire si  $\epsilon = k_3 u_0^2/k$  est petit. Il est encore important de noter que même si  $k_3$  est petit par rapport à  $k$ , la non-linéarité ne sera petite que si  $u_0^2$  est grand par rapport à  $k/k_3$ . Ainsi,  $\epsilon$  est le paramètre qui caractérise la non-linéarité.

**Remarque.** L'adimensionnement des longueurs par la condition initiale a surtout du sens pour les systèmes conservatifs ou stables car dans ce cas elle correspond au maximum d'énergie (si pas de vitesse initiale) du système. Pour un système mécanique donné, en général on prendra une longueur caractéristique du système pour l'adimensionnement.

### 2.2.2 Système étudié

Dans ce chapitre nous allons étudier quelques méthodes d'analyse permettant d'obtenir les solutions approchées d'une équation différentielle **faiblement non linéaire à un degré de liberté**.

Pour illustrer ces méthodes, on considère une masse  $m$  subissant des forces conservatives (i.e. pas d'amortissement) dont la résultante est la **fonction non linéaire**  $-f(x)$ . L'application du PFD nous fournit l'équation du mouvement suivante :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0. \quad (2.54)$$

Comme dans le cours de *Vibrations des structures* de 4<sup>ème</sup> année, le système est étudié par rapport à sa **position d'équilibre**  $x_e$  (solution de  $f(x) = 0$ , les force se compense à l'équilibre). Pour cela on introduit la variable  $u = x - x_e$ . L'équation du mouvement précédente devient donc :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + f(x_e + u) = 0. \quad (2.55)$$

On fait l'hypothèse que le système s'écarte peu de sa position d'équilibre et on effectue un développement limité de  $f$  autour de  $x_e$  (i.e. en  $u = 0$ ) jusqu'à l'ordre  $N$ . L'équation du mouvement devient :

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + \underbrace{\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_e} u^n}_{k_n} + \mathcal{O}(u^{N+1}) = 0, \quad (2.56)$$

où  $x_e$  est une position d'équilibre stable, i.e.  $f(x_e) = k_0 = 0$  et  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_e} = k_1 > 0$ . En se restreignant à l'ordre  $N = 3$  et en oubliant le reste on obtient l'équation différentielle suivante

$$m \frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \hat{\alpha}_2 u^2 + \hat{\alpha}_3 u^3 = 0 \quad (2.57)$$

avec  $\omega_0^2 = \sqrt{k_1/m}$ ,  $\hat{\alpha}_2 = k_2/m$  et  $\hat{\alpha}_3 = k_3/m$ .

L'Eq. (2.57) est adimensionnée. Le déplacement  $u$  est adimensionné par une longueur caractéristique  $U$  et le temps par la pulsation  $\omega_0$  en posant :

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \omega_0 t. \quad (2.58)$$

Avec (2.58), l'Eq. (2.57) devient

$$\omega_0^2 U \frac{d^2 \tilde{u}}{d \tilde{t}^2} + \omega_0^2 U \tilde{u} + \hat{\alpha}_2 U^2 \tilde{u}^2 + \hat{\alpha}_3 U^3 \tilde{u}^3 = 0. \quad (2.59)$$

En posant

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\hat{\alpha}_2 U}{\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha}_3 = \frac{\hat{\alpha}_3 U^2}{\omega_0^2} \quad (2.60)$$

nous aboutissons à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d \tilde{t}^2} + \tilde{u} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{u}^2 + \tilde{\alpha}_3 \tilde{u}^3 = 0. \quad (2.61)$$

Dans les sections qui suivent, l'Eq. (2.61) sera par des méthodes de perturbations qui reposent sur l'hypothèse de **non-linéarités faibles**, i.e.  $\tilde{\alpha}_2 \ll 1$  et  $\tilde{\alpha}_3 \ll 1$ . Les méthodes de perturbation reposent sur l'**introduction d'un petit paramètre**  $\epsilon$  qui satisfait  $0 < \epsilon \ll 1$ , les paramètres  $\tilde{\alpha}_2$  et  $\tilde{\alpha}_3$  sont dits d'ordre  $\epsilon$  (noté  $\tilde{\alpha}_2 \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  et  $\tilde{\alpha}_3 \sim \mathcal{O}(\epsilon)$ ).

En notant  $\tilde{\alpha}_2 = \epsilon \alpha_2$  et  $\tilde{\alpha}_3 = \epsilon \alpha_3$  (avec donc  $\alpha_2 \sim \mathcal{O}(1)$  et  $\alpha_3 \sim \mathcal{O}(1)$ ), en oubliant les  $\tilde{\phantom{u}}$  pour alléger les notations et en symbolisant les dérivées temporelles par des points, l'équation étudiée s'écrit finalement :

$$\ddot{u} + u + \epsilon \alpha_2 u^2 + \epsilon \alpha_3 u^3 = 0 \quad (2.62)$$

Dans toutes la suite de ce document et pour simplifier les développements mathématiques les conditions initiales suivantes :

$$u(0) = s_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (2.63)$$

sont utilisées.

Dans les sections qui suivent les solutions analytiques approchées de l'Eq. (2.62) avec les conditions initiales (2.63) sont calculées successivement par la **méthode des perturbations dite naïve** (*the straightforward expansion*), la **méthode de Lindstedt-Poincaré**, la **méthode des échelles multiples** et la **méthode de moyennage de Bogoliubov-Krylov**.

### 2.2.3 Méthode des perturbations « naïve »

L'idée de cette méthode est d'exprimer la variable  $u$  sous la forme d'une **série entière de  $\epsilon$**

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.64)$$

qui est introduite dans (2.62), ce qui donne

$$\begin{aligned} & \ddot{u}_0 + \epsilon \ddot{u}_1 + \epsilon^2 \ddot{u}_2 + \dots \\ & + \left( u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \right) \\ & + \epsilon \alpha_2 \left( u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \right)^2 \\ & + \epsilon \alpha_3 \left( u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots \right)^3 = 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

que l'on met sous la forme

$$\ddot{u}_0 + u_0 + \epsilon \left( \ddot{u}_1 + u_1 + \alpha_2 u_0^2 + \alpha_3 u_0^3 \right) + \epsilon^2 \left( \ddot{u}_2 + u_2 + 2\alpha_2 u_0 u_1 + 3\alpha_3 u_0^2 u_1 \right) + \dots = 0 \quad (2.66)$$

Comme l'équation précédente est vraie quelque soit  $\epsilon$ , les termes en facteur des puissances de  $\epsilon$  sont équilibrés et égalisés à zéro :

$$\epsilon^0 : \quad \ddot{u}_0 + u_0 = 0 \quad (2.67a)$$

$$\epsilon^1 : \quad \ddot{u}_1 + u_1 = -\alpha_2 u_0^2 - \alpha_3 u_0^3 \quad (2.67b)$$

$$\epsilon^2 : \quad \ddot{u}_2 + u_2 = -2\alpha_2 u_0 u_1 - 3\alpha_3 u_0^2 u_1 \quad (2.67c)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Les conditions initiales étant d'ordre  $\mathcal{O}(1)$  l'Eq. (2.63) devient

$$u_0(0) = s_0 \quad u_n(0) = 0 \quad (2.68a)$$

$$\dot{u}_0(0) = 0 \quad \dot{u}_n(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.68b)$$

Les équations (2.67) sont résolues de façon itérative. Chaque terme  $u_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), une fois déterminé, intervient dans les termes sources de l'équation du terme suivant.

La solution générale de (2.67a) est (cf. Sect. A.1.1)

$$u_0 = A \cos(t) + B \sin(t) \quad (2.69)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales, on trouve finalement

$$u_0 = s_0 \cos(t). \quad (2.70)$$

L'expression de  $u_0$  étant maintenant connue, la solution de (2.67b) est maintenant recherchée. Elle est la somme d'une solution générale  $u_1^h$  qui a la même forme que (2.69)

$$u_1^h = A \cos(t) + B \sin(t) \quad (2.71)$$

et d'une solution particulière  $u_1^p$  déterminée en utilisant le principe de superposition (cf. Sect. A.1.3). Après calcul on trouve :

$$u_1^p = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2} + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \cos(2t) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3t) - \underbrace{\frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} t \sin(t)}_{\text{Terme séculaire}}. \quad (2.72)$$

*Démonstration.* Avec  $u_0 = s_0 \cos(t)$ , l'Éq. (2.67b) devient

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\alpha_2 u_0^2 - \alpha_3 u_0^3, \quad (2.73a)$$

$$= -\alpha_2 s_0^2 \cos^2(t) - \alpha_3 s_0^3 \cos^3(t), \quad (2.73b)$$

$$= -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2} [1 + \cos(2t)] - \frac{\alpha_3 s_0^3}{4} [3 \cos(t) + \cos(3t)]. \quad (2.73c)$$

Le principe de superposition stipule que la solution de (2.73) est la somme des solutions de chacune des équations suivantes :

1.

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2}. \quad (2.74)$$

Il s'agit ici d'un forçage statique, on a donc simplement :

$$u_1 = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2}. \quad (2.75)$$

2.

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2} \cos(2t). \quad (2.76)$$

Il s'agit maintenant d'un forçage harmonique, la solution est donc recherchée sous la forme  $u_1 = U_1 \cos(2t)$ . En introduisant cette forme générale de solution dans (2.76) on obtient :

$$-4U_1 \cos(2t) + U_1 \cos(2t) = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2} \cos(2t) \quad (2.77)$$

soit

$$U_1 = \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \quad (2.78)$$

et donc

$$u_1 = \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \cos(2t). \quad (2.79)$$

3.

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{\alpha_3 s_0^3}{4} \cos(3t). \quad (2.80)$$

En procédant de façon similaire à précédemment on trouve

$$u_1 = \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3t). \quad (2.81)$$

4.

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} \cos(t). \quad (2.82)$$

Le terme  $-\frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} \cos(t)$ , appelé **terme forçant résonant**, correspond à un forçage harmonique à la pulsation propre  $\omega_0 = 1$  de l'oscillateur harmonique d'équation  $\ddot{u}_1 + u_1$ , un phénomène de résonance apparaît donc. Dans ce cas, la solution (en passant dans le plan complexe) sous la forme générale  $\hat{u}_1 = \hat{U}_1 t e^{it}$  (avec  $u_1 = \operatorname{Re}[\hat{u}_1]$ ). La forme complexe de (2.82) étant

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -\frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} e^{it}, \quad (2.83)$$

en y introduisant la forme générale de solution recherchée on obtient

$$\begin{aligned}\hat{U}_1 j e^{jt} + \hat{U}_1 j e^{jt} - \hat{U}_1 t e^{jt} + \hat{U}_1 t e^{jt} &= -\frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} e^{jt}, \\ 2\hat{U}_1 j &= -\frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} e^{jt},\end{aligned}\quad (2.84)$$

soit

$$\hat{U}_1 = j \frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} \quad (2.85)$$

et donc

$$\hat{u}_1 = j \frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} t e^{jt} \Rightarrow \boxed{u_1 = \operatorname{Re}[\hat{u}_1] = -\frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} t \sin(t)}. \quad (2.86)$$

Finalement, en sommant les quatre solutions précédemment déterminées, on obtient la solution particulière de (2.67b) donnée par (2.72) et la démonstration est terminée. ■

L'expression de  $u_1$  est donc :

$$\begin{aligned}u_1(t) &= A \cos(t) + B \sin(t) \\ &\quad - \frac{\alpha_2 s_0^2}{2} + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \cos(2t) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3t) - \frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} t \sin(t).\end{aligned}\quad (2.87)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont encore une fois déterminées à partir des conditions initiales (2.68), on trouve

$$A = \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \quad \text{et} \quad B = 0. \quad (2.88)$$

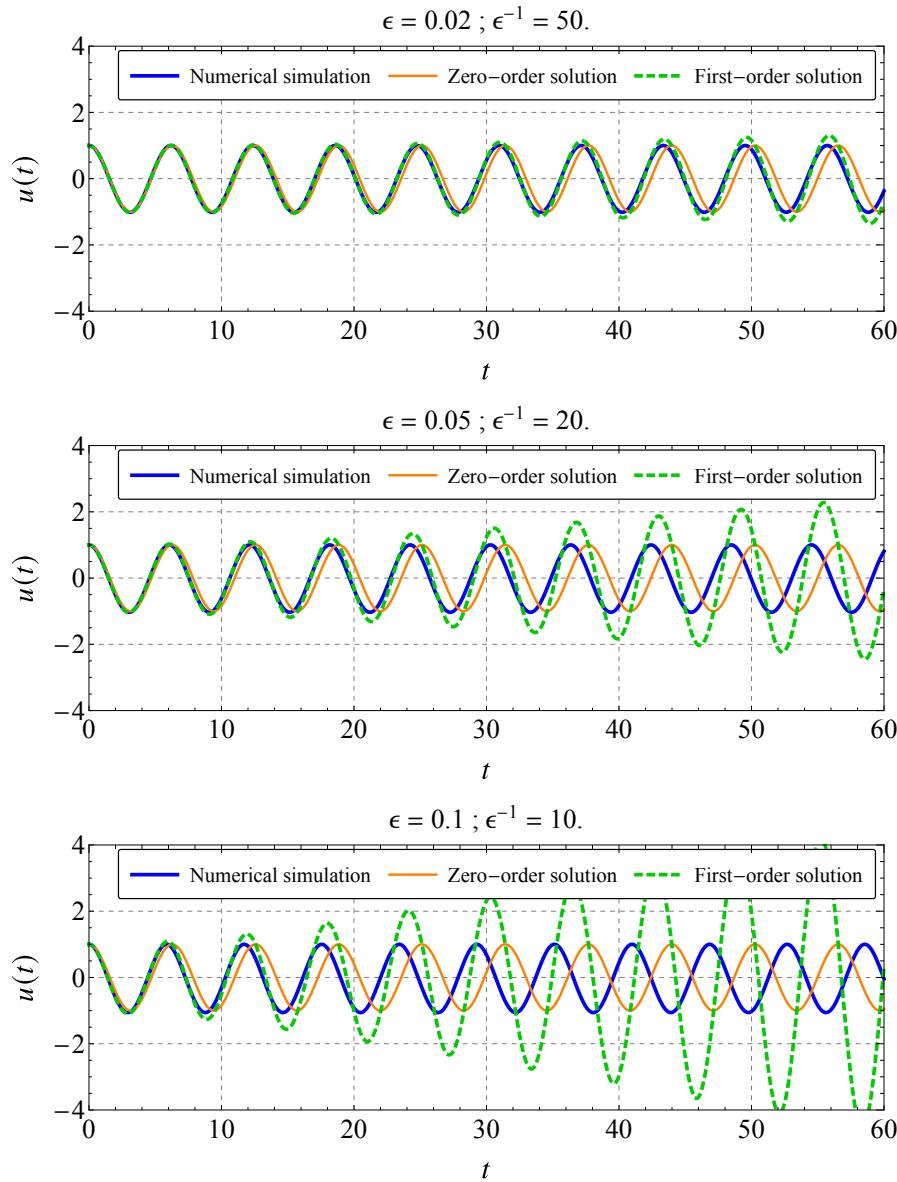
Finalement, à l'ordre 1, la solution analytique approchée de (2.62) par la méthode des perturbations « naïve » est :

$$\begin{aligned}u(t) &= u_0(t) + \epsilon u_1(t) \\ &= s_0 \cos(t) \\ &\quad + \epsilon \left[ \left( \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \right) \cos(t) + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} (\cos(2t) - 3) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3t) - \frac{3\alpha_3 s_0^3}{8} t \sin(t) \right].\end{aligned}\quad (2.89)$$

Pour continuer et obtenir les ordres supérieurs il faut résoudre (2.67c) connaissant  $u_0$  et  $u_1$  et ainsi de suite.

Nous notons que le terme en  $\epsilon t \sin(t)$ , appelé **terme séculaires**, résultant des termes **forçant résonnant** n'est petit, comme on le suppose, que lorsque  $\epsilon t$  est petit par rapport à l'unité. Lorsque  $\epsilon t \sim \mathcal{O}(1)$ , ce terme supposé être une petite correction devient de même ordre de grandeur que la terme principal. De plus, lorsque  $\epsilon t > \mathcal{O}(1)$ , la « petite correction » devient plus grande que le terme principal. Par conséquent, l'expression approchée (2.89) n'est valide que pour des temps tels que  $\epsilon t < \mathcal{O}(1)$ , i.e.  $t < \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ . Les solutions aux ordres 0 (i.e. Éq. (2.70), solution du système linéaire associé) et 1 (i.e. Éq. (2.89)) sont comparés à l'intégration numérique directe de (2.62) en Fig. 2.3 pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.05$  et  $0.1$ . On observe bien l'augmentation de l'amplitude de la solution approchée pour  $t > \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ .

La présence des termes séculaires s'explique par le fait que la méthode des perturbations « naïves » impose au système d'osciller à une pulsation égale à 1 or nous avons vu (cf. Fig. 1.4) qu'un oscillateur non linéaire oscille à une fréquence qui dépend de l'amplitude. Le terme  $\epsilon t \sin(t)$  permet de prendre en



**FIGURE 2.3.** Résultat de la méthode des perturbations « naïve ». Les solutions aux ordres 0 (i.e. Éq. (2.70), solution du système linéaire associé) et 1 (i.e. Éq. (2.89)) sont comparés à l'intégration numérique directe de (2.62) pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.05$  et  $0.1$ . De plus  $\alpha_2 = 1$  et  $\alpha_3 = 2$ .

compte cette variation de fréquence en fonction de l'amplitude. Pour le comprendre il suffit d'écrire le développement limité suivant :

$$\sin((1 + \epsilon)t) = \sin(t) + \epsilon t \cos(t) - \frac{\epsilon^2 t^2}{2} \sin(t) + \dots \quad (2.90)$$

On peut également noter que l'approximation obtenue permet en revanche de reproduire le phénomène de **distorsion harmonique**.

Dans la suite, des méthodes qui prennent en compte cette évolution de la fréquence en fonction de l'amplitude, et par conséquent qui permettent d'éliminer les termes séculaires, sont présentées.

### 2.2.4 Méthode de Lindstedt-Poincaré

L'idée est maintenant d'introduire un nouvelle variable temps  $\tau$  comme suit :

$$\tau = \omega t \quad (2.91)$$

où  $\omega$  est la **pulsation d'oscillation du système** et de la considérer comme une nouvelle inconnue du problème.

En sachant que  $\frac{d^2}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$  et en notant  $\frac{du}{d\tau} = u'$ , l'équation (2.62) devient :

$$\omega^2 u'' + u + \epsilon \alpha_2 u^2 + \epsilon \alpha_3 u^3 = 0. \quad (2.92)$$

Comme pour la méthode des perturbations naïves on développe  $u$  en série entière de  $\epsilon$  :

$$u(\tau) = u_0(\tau) + \epsilon u_1(\tau) + \epsilon^2 u_2(\tau) + \dots \quad (2.93)$$

La pulsations  $\omega$  est également développée en série entière de  $\epsilon$  :

$$\omega = 1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (2.94)$$

Les expressions (2.93) et (2.94) de  $u$  et  $\omega$  respectivement sont introduites dans (2.92) :

$$\begin{aligned} & (1 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2)^2 (u_0'' + \epsilon u_1'' + \epsilon^2 u_2'') \\ & + (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2) \\ & + \epsilon \alpha_2 (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2)^2 \\ & + \epsilon \alpha_3 (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2)^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Comme précédemment les termes en facteur des puissances de  $\epsilon$  sont équilibrés et égalisés à zéro, ce qui donne :

$$\epsilon^0 : \quad u_0'' + u_0 = 0 \quad (2.96a)$$

$$\epsilon^1 : \quad u_1'' + u_1 = -\alpha_2 u_0^2 - \alpha_3 u_0^3 - 2\omega_1 u_0'' \quad (2.96b)$$

$$\epsilon^2 : \quad u_2'' + u_2 = -2\alpha_2 u_0 u_1 - 3\alpha_3 u_0^2 u_1 - \omega_1^2 u_0'' - 2\omega_2 u_0'' - 2\omega_1 u_1'' \quad (2.96c)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Les équations (2.96) sont résolues de façon itérative. Chaque terme  $u_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), une fois déterminé, intervient dans les termes sources de l'équation du terme suivant (exactement comme pour la méthode des perturbations « naïve »).

La solutions générale de (2.96a) est (cf. Sect. A.1.1) :

$$u_0 = A \cos(\tau) + B \sin(\tau) \quad (2.97)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales, on trouve finalement

$$u_0 = s_0 \cos(\tau). \quad (2.98)$$

L'Éq. (2.96b) est ensuite résolue connaissant  $u_0$ . La solution particulière est obtenue à l'aide du principe de superposition (cf. Sect. A.1.3). Après calcul on trouve :

$$u_1^p = -\frac{\alpha_2 s_0^2}{2} + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \cos(2\tau) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3\tau) + \underbrace{\frac{1}{2} \left( 2\omega_1 s_0 - \frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} \right) t \sin(\tau)}_{\text{Terme séculaire}}. \quad (2.99)$$

Les termes séculaires peuvent ici être supprimés en choisissant  $\omega_1$  telle que :

$$2\omega_1 s_0 - \frac{3\alpha_3 s_0^3}{4} = 0 \quad (2.100)$$

soit

$$\omega_1 = \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8}. \quad (2.101)$$

**Remarque.** Il n'est pas nécessaire de calculer la solution avec les termes séculaires et de les annuler pour arriver à (2.99), il suffit de repérer les termes en  $\cos(\tau)$  (causant les termes séculaires) dans le membre de droite de l'équation du mouvement (2.96b) et d'annuler leur coefficient.

L'expression de  $u_1$  est donc :

$$\begin{aligned} u_1(\tau) &= A \cos(\tau) + B \sin(\tau) \\ &\quad - \frac{\alpha_2 s_0^2}{2} + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} \cos(2\tau) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3\tau) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont encore une fois déterminées à partir des conditions initiales (2.68), on trouve les mêmes expressions que pour la méthode des perturbations « naïve », soient

$$A = \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \quad \text{et} \quad B = 0. \quad (2.103)$$

Finalement, à l'ordre 1, la solution analytique approchée de (2.62) par la méthode de Lindstedt-Poincaré est :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + \epsilon u_1(t) \\ &= s_0 \cos(\omega t) \\ &\quad + \epsilon \left[ \left( \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \right) \cos(\omega t) + \frac{\alpha_2 s_0^2}{6} (\cos(2\omega t) - 3) + \frac{\alpha_3 s_0^3}{32} \cos(3\omega t) \right] \end{aligned} \quad (2.104)$$

avec  $\omega = 1 + \epsilon \omega_1$  et  $\omega_1 = \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8}$ .

Les solutions aux ordres 0 (i.e. Éq. (2.98), solution du système linéaire associé) et 1 (i.e. Éq. (2.104)) sont comparés à l'intégration numérique directe de (2.62) en Fig. 2.4 pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.1$  et  $0.5$ .

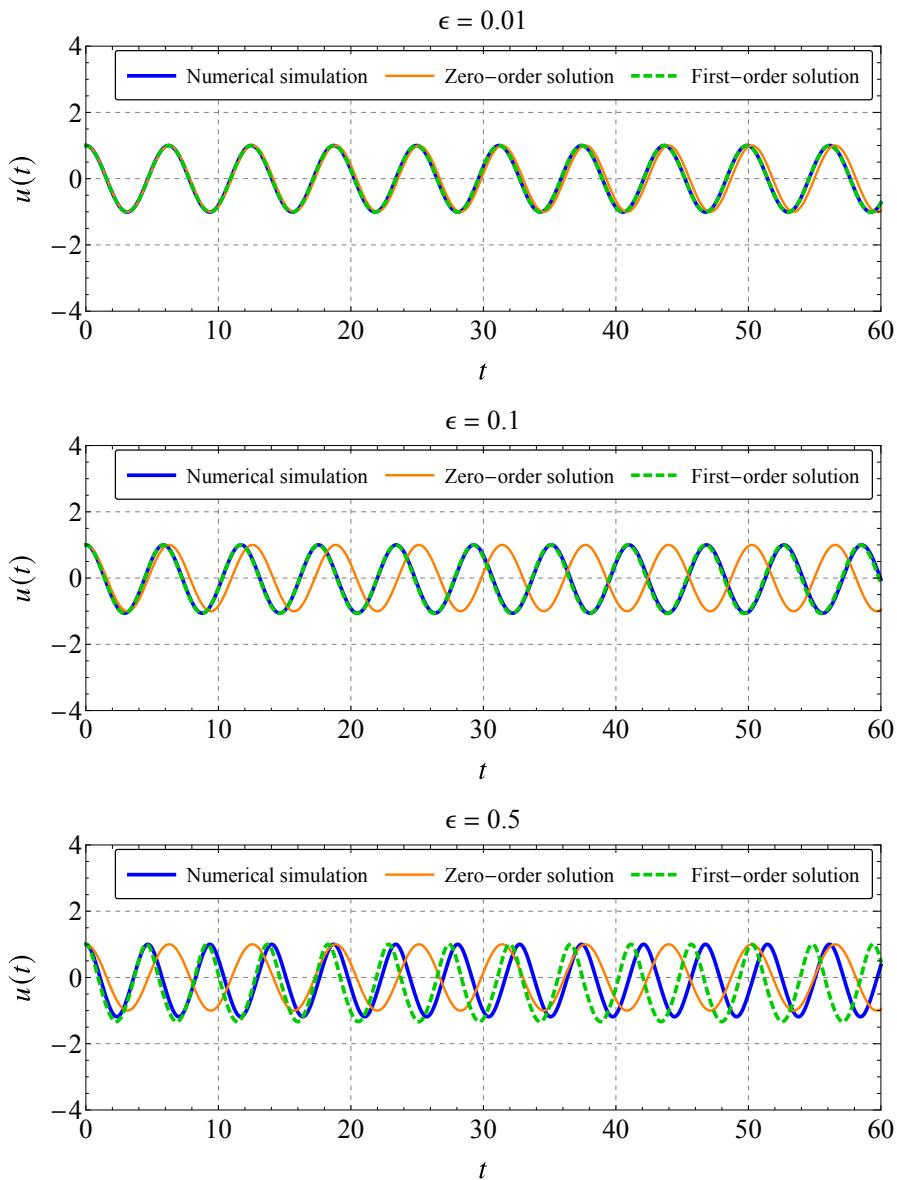
## 2.2.5 Méthode des échelles (de temps) multiples

L'idée de la **méthode des échelles multiples** est de définir  $u$  comme une **fonction de plusieurs variables de temps**  $T_n = \epsilon^n t$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) :

$$u(t) = u(t, \epsilon t, \epsilon^2 t, \dots) = u(T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (2.105)$$

Comme  $0 < \epsilon \ll 1$  les variables  $T_n$  représentent différentes **échelles de temps** :

- $T_0$  : échelle de temps **rapide**
- $T_1$  : échelle de temps **lente**
- $T_2$  : échelle de temps **encore plus lente**
- $T_3$  : ...



**FIGURE 2.4.** Résultat de la méthode de Lindstedt-Poincaré. Les solutions aux ordres 0 (i.e. Éq. (2.98), solution du système linéaire associé) et 1 (i.e. Éq. (2.104)) sont comparés à l'intégration numérique directe de (2.62) pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.1$  et  $0.5$ . De plus  $\alpha_2 = 1$  et  $\alpha_3 = 2$ .

Par exemple si  $\epsilon = \frac{1}{60}$  alors :

- une variation de de temps de 1 seconde à l'échelle de temps rapide  $T_0$  ( $\Delta T_0 = 1\text{s}$ ) correspond aussi à une variation de de temps de 1 seconde à l'échelle de temps  $t$  ( $\Delta t = 1\text{s}$ ) ;
- une variation de de temps de 1 seconde à l'échelle de temps lente  $T_1$  ( $\Delta T_1 = 1\text{s}$ ) correspond aussi à une variation de de temps de 1 minute à l'échelle de temps  $t$  ( $\Delta t = 1\text{ min}$ ) ;
- une variation de de temps de 1 seconde à l'échelle de temps  $T_2$  ( $\Delta T_2 = 1\text{s}$ ) correspond aussi à une variation de de temps de 1 heure à l'échelle de temps  $t$  ( $\Delta t = 1\text{ h}$ ) .

La variable  $u$  étant ne dépendant plus que d'une seule variables de temps  $t$  mais de plusieurs ( $T_0, T_1$ ,

$T_2 \dots$ ) les dérivées temporelles deviennent :

$$\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots} \quad (2.106)$$

et

$$\boxed{\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} \right) + \dots} \quad (2.107)$$

*Démonstration.* La différentielle totale exacte d'une fonction  $f(T_0, T_1, T_2, \dots)$  dépendant de plusieurs variables  $T_0, T_1, T_2, \dots$  est :

$$df(T_0, T_1, T_2, \dots) = \frac{\partial f}{\partial T_0} dT_0 + \frac{\partial f}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial f}{\partial T_2} dT_2 + \dots \quad (2.108a)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial T_0} dt + \epsilon \frac{\partial f}{\partial T_1} dt + \epsilon^2 \frac{\partial f}{\partial T_2} dt + \dots \quad (2.108b)$$

et donc

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial f}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial f}{\partial T_2} + \dots} \quad (2.109)$$

Ce qui conclue la démonstration pour la dérivée première. Pour la dérivée seconde il suffit d'appliquer une seconde fois le résultat. ■

Ensuite, comme précédemment  $u$  est développé en série entière de  $\epsilon$  :

$$\boxed{u(T_0, T_1, T_2, \dots) = u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \epsilon u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots} \quad (2.110)$$

Les expressions des dérivées temporelles (2.106) et (2.107) ainsi que le développement (2.110) sont introduits dans l'équation du mouvement (2.62), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} \right) (u_0 + \epsilon u_1) + (u_0 + \epsilon u_1) + \epsilon \alpha_2 (u_0 + \epsilon u_1)^2 + \epsilon \alpha_3 (u_0 + \epsilon u_1)^3 + \dots &= 0 \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 + \epsilon \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + u_1 + \alpha_2 u_0^2 + \alpha_3 u_0^3 \right) + \dots &= 0 \end{aligned} \quad (2.111)$$

Les termes en puissance de  $\epsilon$  du membre de gauche de l'équation précédente sont équilibrés puis annulés fin d'obtenir les équations suivantes

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \quad (2.112a)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \alpha_2 u_0^2 - \alpha_3 u_0^3 \quad (2.112b)$$

$$\epsilon^2 : \quad \dots \quad (2.112c)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Les systèmes linéaires correspondant à chaque ordre sont résolus successivement. Précédemment, pour chaque ordre, on résolvait l'équation inhomogène en calculant la solution du système homogène puis la solution particulière et enfin on appliquait les conditions initiales.

On pourrait faire de même ici, mais cela est compliqué, on va utiliser un autre méthode qui est totalement équivalente [NM07] : la solution du système homogène n'est calculée qu'à l'ordre 0, aux ordres suivants seule la solution particulière est prise en compte. Les conditions initiales ne sont appliquées qu'à la fin où les constantes restantes sont elles aussi développé en séries entière de  $\epsilon$ .

L'équation (2.112a) est résolue en premier. Par commodité une représentation complexe est adoptée, ce qui donne :

$$u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) = A(T_1, T_2, \dots) e^{jT_0} + A^*(T_1, T_2, \dots) e^{-jT_0} \quad (2.113)$$

où  $A(T_1, T_2, \dots)$  est constante à l'échelle de temps rapide  $T_0$  mais variable aux échelles de temps plus lentes  $T_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) et  $A^*(T_1, T_2, \dots)$  représente le complexe conjugué de  $A(T_1, T_2, \dots)$ .

On résout maintenant (2.112b) en introduisant l'expression de  $u_0$  précédente de le membre de droite, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= -2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{jT_0} - \frac{\partial A^*}{\partial T_1} e^{-jT_0} \right) \\ &\quad - \alpha_2 \left( A e^{jT_0} + A^* e^{-jT_0} \right)^2 - \alpha_3 \left( A e^{jT_0} + A^* e^{-jT_0} \right)^3 \\ &= -2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{jT_0} - \frac{\partial A^*}{\partial T_1} e^{-jT_0} \right) \\ &\quad - \alpha_2 \left( A^2 e^{2jT_0} + A^{*2} e^{-2jT_0} + 2|A|^2 \right) \\ &\quad - \alpha_3 \left( 3A|A|^2 e^{jT_0} + 3A^*|A|^2 e^{-jT_0} + A^3 e^{3jT_0} + A^{*3} e^{-3jT_0} \right) \end{aligned} \quad (2.114)$$

Les termes en  $e^{jT_0}$  et  $e^{-jT_0}$ , i.e.

$$-2j \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{jT_0} - \alpha_3 3A|A|^2 e^{jT_0} \quad \text{et} \quad 2j \frac{\partial A^*}{\partial T_1} e^{-jT_0} - \alpha_3 3A^*|A|^2 e^{-jT_0} \quad (2.115)$$

dans le membre de droite de (2.114) vont créer des termes séculaires dans l'expression de  $u_1$ . L'information contenue dans les deux équations précédentes est de redondante (l'une est le complexe conjugué de l'autre). Par conséquent pour éviter la présence de termes séculaires il suffit que  $A(T_1, T_2, \dots)$  soit solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} - \frac{3}{2} \alpha_3 A|A|^2 = 0. \quad (2.116)$$

Pour résoudre (2.116), on passe en coordonnées polaires

$$A = \frac{1}{2} a e^{j\varphi}. \quad (2.117)$$

Si on ne suppose que deux échelles de temps  $T_0$  et  $T_1$ , la solution de (2.116) est :

$$A = \frac{1}{2} a e^{j\left(\frac{3\alpha_3 a^2}{8} T_1 + \varphi_0\right)} \quad (2.118)$$

où  $a$  et  $\varphi_0$  sont des constantes.

*Démonstration.* L'introduction de (2.117) dans (2.116) donne :

$$j \left( \frac{\partial a}{\partial T_1} + ja \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} \right) e^{j\varphi} + \frac{3\alpha_3 a^3}{8} e^{j\varphi} = 0. \quad (2.119)$$

On sépare ensuite les partie imaginaire et réelle qui sont respectivement

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \quad (2.120)$$

dont la solution est

$$a = a(T_2, T_3, \dots) \quad (2.121)$$

et

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} - \frac{3\alpha_3 a^3}{8} = 0 \quad (2.122)$$

dont la solution est

$$\varphi = \frac{3\alpha_3 a^2}{8} T_1 + \varphi_0(T_2, T_3, \dots). \quad (2.123)$$

Les grandeurs où  $\varphi_0(T_2, T_3, \dots)$  et  $a(T_2, T_3, \dots)$  sont constantes à l'échelle de temps lente  $T_1$  mais variables aux échelles de temps plus lentes  $T_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Par conséquent, si seules les deux premières échelles de temps sont considérées (i.e.  $T_0$  et  $T_1$ ) alors  $a$  et  $\varphi_0$  sont des constantes et la démonstration est finie. ■

Reste maintenant à déterminer l'expression de  $u_1$ . Les termes causant les termes séculaires étant annulés, l'Eq. (2.114) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = & -\alpha_2 \left( A^2 e^{2jT_0} + A^{*2} e^{-2jT_0} + 2|A|^2 \right) \\ & - \alpha_3 \left( A^3 e^{3jT_0} + A^{*3} e^{-3jT_0} \right) \end{aligned} \quad (2.124)$$

avec  $A(T_1)$  donné par (2.118).

Pour rappel, on ne prend en compte pour l'instant que la solution particulière de (2.124) qui est obtenue à laide du principe de superposition (cf. Sect. A.1.3) :

$$\begin{aligned} u_1 = & \frac{\alpha_2 A^2}{3} e^{2jT_0} + \frac{\alpha_2 A^{*2}}{3} e^{-2jT_0} - 2\alpha_2 |A|^2 + \frac{\alpha_3 A^3}{8} e^{3jT_0} + \frac{\alpha_3 A^{*3}}{8} e^{-3jT_0}, \\ = & \frac{\alpha_2 a^2}{6} \cos \left[ 2 \left( T_0 + \frac{3\alpha_3 a^2}{8} T_1 + \varphi_0 \right) \right] - \frac{\alpha_2 a^2}{2} + \frac{\alpha_3 a^3}{32} \cos \left[ 3 \left( T_0 + \frac{3\alpha_3 a^2}{8} T_1 + \varphi_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

En repassant à l'échelle de temps physique  $t$  en écrivant  $T_0 = t$  et  $T_1 = \epsilon t$ , l'expression approchée de  $u$  à l'ordre 1 est donc :

$$\begin{aligned} u(t) = & a \cos \left[ t + \frac{3\alpha_3 a^2}{8} \epsilon t + \varphi_0 \right] \\ & + \epsilon \left( \frac{\alpha_2 a^2}{6} \cos \left[ 2 \left( t + \frac{3\alpha_3 a^2}{8} \epsilon t + \varphi_0 \right) \right] - 2\alpha_2 a^2 + \frac{\alpha_3 a^3}{32} \cos \left[ 3 \left( t + \frac{3\alpha_3 a^2}{8} \epsilon t + \varphi_0 \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Pour terminer, il fait déterminer la constantes  $a$  et  $\varphi_0$  à l'aide des conditions initiales (2.63) qui s'écrivent ici :

$$u(0) = s_0 = a \cos(\varphi_0) + \epsilon \left( \frac{\alpha_2 a^2}{6} \cos(2\varphi_0) - \frac{\alpha_2 a^2}{2} + \frac{\alpha_3 a^3}{32} \cos(3\varphi_0) \right), \quad (2.127)$$

$$\dot{u}(0) = 0 = -a \sin(\varphi_0) - \epsilon \left( \frac{3\alpha_3 a^2}{8} \sin(\varphi_0) + \frac{\alpha_2 a^2}{2} \sin(2\varphi_0) + \frac{3\alpha_3 a^3}{32} \sin(3\varphi_0) \right). \quad (2.128)$$

Comme stipulé plus haut, les constantes  $a$  et  $\varphi_0$  sont également développées en séries entières de  $\epsilon$  :

$$a = a_0 + \epsilon a_1 + \dots \quad (2.129)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{00} + \epsilon \varphi_{01} + \dots \quad (2.130)$$

Après un développement limité à l'ordre 1 de  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$  autour de  $\epsilon = 0$  et en équilibrant les termes en puissance de  $\epsilon$  on trouve :

$$\varphi_{00} = 0, \quad a_0 = s_0, \quad \varphi_{01} = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_2 s_0^3}{32}. \quad (2.131)$$

*Démonstration.* Le développement limité à l'ordre 1 de la vitesse initiale  $u(0)$  et du déplacement initial  $\dot{u}(0)$  autour de  $\epsilon = 0$  donne respectivement :

$$u(0) = s_0 = a_0 \cos(\varphi_{00}) + \frac{\epsilon}{96} (3\alpha_3 a_0^3 \cos(3\varphi_{00}) + 16\alpha_2 a_0^2 \cos(2\varphi_{00}) - 48\alpha_2 a_0^2 - 96a_0 \varphi_{01} \sin(\varphi_{00}) + 96a_1 \cos(\varphi_{00})) \quad (2.132a)$$

$$\dot{u}(0) = 0 = -a_0 \sin(\varphi_{00}) + \frac{\epsilon}{96} (-36\alpha_3 a_0^3 \sin(\varphi_{00}) - 9\alpha_3 a_0^3 \sin(3\varphi_{00}) - 32\alpha_2 a_0^2 \sin(2\varphi_{00}) - 96a_1 \sin(\varphi_{00}) - 96a_0 \varphi_{01} \cos(\varphi_{00})) \quad (2.132b)$$

Puis, un équilibrant des termes en puissance de  $\epsilon$ , cela donne à l'ordre 0 :

$$a_0 \cos(\varphi_{00}) = s_0 \quad \text{et} \quad -a_0 \sin(\varphi_{00}) = 0 \quad (2.133)$$

et donc

$$\boxed{\varphi_{00} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{a_0 = s_0}. \quad (2.134)$$

Ensuite à l'ordre 1 en prenant en compte (2.134), cela donne pour la vitesse  $\dot{u}(0)$  :

$$-s_0 \varphi_{01} = 0 \quad (2.135)$$

et donc

$$\boxed{\varphi_{01} = 0}. \quad (2.136)$$

En prenant en compte également (2.134) et (2.136) pour le déplacement à l'ordre 1 on obtient :

$$a_1 - \frac{\alpha_2 a_0^2}{3} + \frac{\alpha_2 a_0^3}{32} = 0 \quad (2.137)$$

et donc finalement on a :

$$\boxed{a_1 = \frac{\alpha_2 s_0^2}{3} - \frac{\alpha_2 s_0^3}{32}} \quad (2.138)$$

et la démonstration est terminée. ■

La solution approchée à l'ordre 1 de (2.62) par la méthode des échelles multiples est finalement :

$$u(t) = s_0 \cos \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8} \right) t \right] + \epsilon \left( \frac{\alpha_2 a_0^2}{6} \cos \left[ 2 \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8} \right) t \right] - 2\alpha_2 a_0^2 + \frac{\alpha_2 a_0^3}{32} \cos \left[ 3 \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8} \right) t \right] \right) \quad (2.139)$$

qui est identique à la solution trouvée par la méthode de Lindstedt-Poincaré (cf. Éq. (2.104)).

**Remarque.** À l'ordre 0 ( $\epsilon = 0$ ), on obtient  $u(t) = s_0 \cos(t)$ . À l'ordre 1, en annulant les termes séculaires puis en déterminant  $u_1$ , on obtient la solution précédente (2.139) où l'amplitude et la pulsation sont perturbés. Il est possible d'obtenir une **solution intermédiaire** en se contentant de  $u_0$  mais avec une expression de  $A$  obtenue par l'annulation des termes de (2.114) créant des termes créant des termes séculaires, on obtient alors

$$u(t) = s_0 \cos \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8} \right) t \right] \quad (2.140)$$

où uniquement la pulsation est perturbée. Il est possible de faire de même avec la méthode de Lindstedt-Poincaré en s'arrêtant à la détermination de  $\omega_1$  (cf. Éq. (2.101)), ce qui mène également à (2.140).

La solution intermédiaire (2.140) et celle à l'ordre 1 (2.139) sont comparées à l'intégration numérique directe de (2.62) en Fig. 2.5 pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.1$  et  $0.5$ .

### 2.2.6 Méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov

L'équation du mouvement étudiée (2.62) est réécrite ici sous la forme générale suivante :

$$\ddot{u} + \epsilon h(u, \dot{u}) + u = 0 \quad (2.141)$$

où dans notre exemple

$$h(u, \dot{u}) = \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3. \quad (2.142)$$

L'idée principale de la **méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov** est d'abords d'exprimer la solution du système faiblement non linéaire en s'inspirant de la solution du système linéaire associé, i.e.

$$u(t) = a(t) \cos(t + \varphi(t)) = a(t) \cos \phi(t) \quad (2.143)$$

pour le déplacement, et

$$v(t) = -a(t) \sin(t + \varphi(t)) = -a(t) \sin \phi(t) \quad (2.144)$$

pour la vitesse.

À noter que  $a(t)$  et  $\varphi(t)$  sont des constantes dans le cas linéaire et que  $v(t)$  n'est pas la dérivée de  $u(t)$ , on pose une expression qui à la même forme que celle du cas linéaire.

Si on dérive « vraiment »  $u(t)$  par rapport au temps, cela donne

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{a} \cos \phi - a \dot{\phi} \sin \phi, \\ &= \dot{a} \cos \phi - a (1 + \dot{\phi}) \sin \phi \\ &= -a \sin \phi + \dot{a} \cos \phi - a \dot{\phi} \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Par conséquent, pour être en accord avec la forme de vitesse souhaitée, on impose

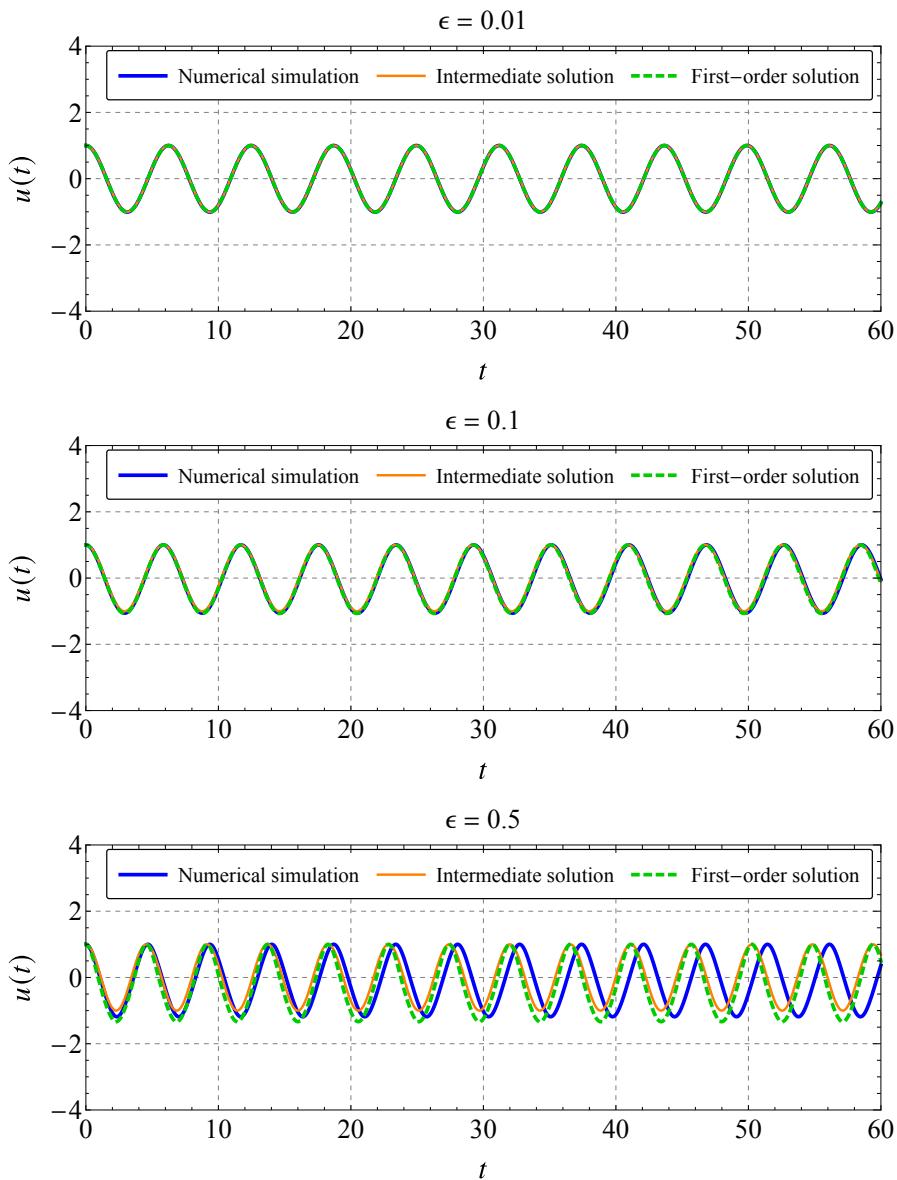
$$\dot{a} \cos \phi - a \dot{\phi} \sin \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{a} \cos \phi}{a \sin \phi} \quad \text{et} \quad \dot{a} = a \dot{\phi} \frac{\sin \phi}{\cos \phi}. \quad (2.146)$$

Ensuite on dérive « vraiment »  $v(t)$  par rapport au temps

$$\ddot{u} = -a \cos \phi - \dot{a} \sin \phi - a \dot{\phi} \cos \phi. \quad (2.147)$$

En utilisant (2.143) et (2.144) et l'équation précédente, (2.141) devient

$$-\dot{a} \sin \phi - a \dot{\phi} \cos \phi + \epsilon h(a \cos \phi, -a \sin \phi) = 0. \quad (2.148)$$



**FIGURE 2.5.** La solution intermédiaire (2.140) et celle à l'ordre 1 (2.139) sont comparées à l'intégration numérique directe de (2.62) pour  $s_0 = 1$  et (de haut en bas)  $\epsilon = 0.01, 0.1$  et  $0.5$ . De plus  $\alpha_2 = 1$  et  $\alpha_3 = 2$ .

En remplaçant successivement  $\dot{a}$ ,  $\dot{\varphi}$  dans (2.148) par leurs expressions respectives données par (2.146) on obtient

$$\dot{a} = \epsilon h (a \cos \phi, -a \sin \phi) \sin \phi, \quad (2.149a)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon}{a} h (a \cos \phi, -a \sin \phi) \cos \phi. \quad (2.149b)$$

**Remarque.** Pour l'instant aucune approximation n'a été faite. Le système d'équations différentielles précédent décrivant l'évolution de  $a(t)$  et  $\varphi(t)$  est équivalent à l'équation de départ.

Comme  $0 < \epsilon \ll 1$  donc  $a(t)$  et  $\varphi(t)$  sont lentement variables donc évoluent peu pendant une période  $T_0 = 2\pi$ . L'**approximation de Bogoliubov–Krylov** consiste à supposer que  $a(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{a}(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  sont

constants pendant cette période  $T_0$ . En appliquant la méthode à (2.149) on arrive à

$$\dot{a} = 0, \quad (2.150a)$$

$$\dot{\varphi} = \epsilon \frac{3a^2\alpha_3}{8} \quad (2.150b)$$

et donc, après utilisation des conditions initiales

$$a(t) = \text{Cste} = s_0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \epsilon \frac{3s_0^2\alpha_3}{8} t. \quad (2.151)$$

La solution approchée à l'ordre 1 de (2.62) par la méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov est finalement :

$$u(t) = s_0 \cos \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 s_0^2}{8} \right) t \right] \quad (2.152)$$

qui n'est autre que la solution intermédiaire (2.140) trouvée précédemment par la méthode des échelles multiples.

*Démonstration.* L'application de l'approximation de Bogoliubov–Krylov consiste ici à intégrer (2.149) sur une période  $T_0 = 2\pi$  en supposant  $a(t)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\dot{a}(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  constants, ce qui donne pour (2.149a) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \dot{a} dt &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} h(a \cos \phi, -a \sin \phi) \sin \phi dt \\ &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin \phi \left( \alpha_2 a^2 \cos^2 \phi + \alpha_3 a^3 \cos^3 \phi \right) dt \\ &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{1}{8} \left( 2\alpha_3 a^3 \sin(2\phi) + \alpha_3 a^3 \sin(4\phi) + 2\alpha_2 a^2 \sin(\phi) + 2\alpha_2 a^2 \sin(3\phi) \right) dt \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \left( 2\alpha_3 a^3 \sin(2\phi) + \alpha_3 a^3 \sin(4\phi) + 2\alpha_2 a^2 \sin(\phi) + 2\alpha_2 a^2 \sin(3\phi) \right) d\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.153)$$

où  $\cos^2 \phi$  et  $\cos^3 \phi$  ont été développés à l'aide d'identités trigonométriques et où l'on a utilisé la relation générale suivante :

$$\frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f(t + \varphi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi. \quad (2.154)$$

On retrouve donc bien l'Éq. (2.150a). En procédant de façon similaire pour (2.149b), il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \dot{\varphi} dt &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} h(a \cos \phi, -a \sin \phi) \cos \phi dt \\ &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos \phi \left( \alpha_2 a^2 \cos^2 \phi + \alpha_3 a^3 \cos^3 \phi \right) dt \\ &= \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{1}{8} \left( 4\alpha_3 a^3 \cos(2\phi) + \alpha_3 a^3 \cos(4\phi) + 3\alpha_3 a^3 + 6\alpha_2 a^2 \cos(\phi) + 2\alpha_2 a^2 \cos(3\phi) \right) dt \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \left( 4\alpha_3 a^3 \cos(2\phi) + \alpha_3 a^3 \cos(4\phi) + 3\alpha_3 a^3 + 6\alpha_2 a^2 \cos(\phi) + 2\alpha_2 a^2 \cos(3\phi) \right) d\phi \\ &= \frac{3a^2\alpha_3}{8} \end{aligned} \quad (2.155)$$

et (2.150b) est également démontrée. La solution de (2.150a) est directement

$$a(t) = \text{Cste} = a_0. \quad (2.156)$$

L'Eq. (2.150b) devient donc

$$\dot{\varphi} = \epsilon \frac{3a_0^2 \alpha_3}{8} \quad (2.157)$$

dont la solution est :

$$\varphi(t) = \epsilon \frac{3a_0^2 \alpha_3}{8} t + \varphi_0 \quad (2.158)$$

avec  $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$ .

Par (2.143) et (2.144) nous avons donc

$$u(t) = a_0 \cos \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 a_0^2}{8} \right) t + \varphi_0 \right] \quad (2.159)$$

$$v(t) = -a_0 \sin \left[ \left( 1 + \epsilon \frac{3\alpha_3 a_0^2}{8} \right) t + \varphi_0 \right] \quad (2.160)$$

On utilise les conditions initiales (2.63) :

$$v(t = 0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \quad (2.161)$$

et

$$u(t = 0) = s_0 \Rightarrow a_0 = s_0 \quad (2.162)$$

pour obtenir finalement (2.152) et conclure la démonstration. ■

La méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov permet un calcul rapide de la solution intermédiaire mais ne permet en l'état d'obtenir des solutions approchées à des ordres supérieurs. Pour ce faire il faut utiliser la méthode de moyennage généralisée [Nah07]. Cette dernière ne sera pas abordée dans ce cours.



---

---

DEUXIÈME PARTIE

---

## Applications



# Forçage harmonique de l'oscillateur de Duffing

## Sommaire

<b>3.1 Équation du modèle</b> . . . . .	47
<b>3.2 Résonance primaire</b> . . . . .	48
3.2.1 Réponse forcée . . . . .	48
3.2.2 Backbone curve . . . . .	53
<b>3.3 Résonances secondaires</b> . . . . .	55
3.3.1 Forçage fort loin de la résonance primaire . . . . .	55
3.3.2 Résonance super-harmonique $\Omega \approx \frac{1}{3}$ . . . . .	56
3.3.3 Résonance sous-harmonique $\Omega \approx 3$ . . . . .	59

---

Dans cette section la méthodes des échelles multiples (voir Section 2.2.5) est utilisée pour étudier les résonances primaires et secondaires de l'oscillateur de Duffing.

## 3.1 Équation du modèle

L'équation de Duffing avec un forçage harmonique est donné par (1.11) que l'on va d'abord adimensionnée. Le déplacement  $u$  est adimensionné par une longueur caractéristique  $U$  et le temps par la pulsation  $\omega_0$  en posant :

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \omega_0 t, \quad (3.1)$$

ce qui donne

$$\omega_0^2 U \frac{d^2 \tilde{u}}{d \tilde{t}^2} + 2\omega_0^2 \zeta U \frac{d \tilde{u}}{d \tilde{t}} + \omega_0^2 U \tilde{u} + \alpha U^3 \tilde{u}^3 = K \cos \left( \frac{\Omega}{\omega_0} \tilde{t} \right) \quad (3.2)$$

qui en posant

$$\epsilon \mu = \zeta, \quad \epsilon \tilde{\alpha} = \frac{\alpha U^2}{\omega_0^2}, \quad \tilde{K} = \frac{K}{\omega_0^2 U} \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (3.3)$$

devient, en omettant les  $\tilde{\cdot}$  pour alléger les notations et en symbolisant les dérivées temporelles par rapport à  $\tilde{t}$  par des points,

$\ddot{u} + u + 2\epsilon \mu \dot{u} + \epsilon \alpha u^3 = K \cos (\Omega t)$

(3.4)

dont les résonances primaires et secondaires sont étudiées dans la suite de la section.

## 3.2 Résonance primaire

### 3.2.1 Réponse forcée

On étudie ce qui se passe quand  $\Omega$  est proche de 1, pour cela on introduit le paramètre  $\sigma$  tel que :

$$\Omega = 1 + \epsilon\sigma. \quad (3.5)$$

En supposant de plus un **forçage faible** (c.à.d  $K = \epsilon k$ ), l'équation précédente devient :

$$\ddot{u} + u + 2\epsilon\mu\dot{u} + \epsilon\alpha u^3 = \epsilon k \cos((1 + \epsilon\sigma)t) \quad (3.6)$$

que l'on va étudier par la méthode des échelles multiples (en ne prenant en compte que deux échelle des temps : une rapide  $T_0 = t$  et une lente  $T_1 = \epsilon t$ . Pour cela on pose :

$$u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3.7)$$

En introduisant (3.7) et les expression des dérivées temporelles (2.106) et (2.107) dans (3.6) puis en équilibrant les termes en puissances de  $\epsilon$  on aboutit, pour les ordres 0 et 1, à :

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \quad (3.8a)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial T_0} - \alpha u_0^3 + k \cos(T_0 + \sigma T_1) \quad (3.8b)$$

La solution de (3.8a) s'écrit de la façon suivante :

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{jT_0} + A^*(T_1) e^{-jT_0} \quad (3.9)$$

où  $A(T_1)$  est constante à l'échelle de temps rapide  $T_0$  mais variable à l'échelle de temps lente  $T_1$  et  $A^*(T_1)$  représente le complexe conjugué de  $A(T_1)$ .

Il faut ensuite résoudre (3.8b) en introduisant l'expression de  $u_0$  précédente de le membre de droite, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = & - \left[ 2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 3\alpha A |A|^2 \right] e^{jT_0} \\ & - \alpha A^3 e^{j3T_0} + \frac{k}{2} e^{j(T_0 + \sigma T_1)} \\ & + c.c. \end{aligned} \quad (3.10)$$

où  $c.c.$  est complexe conjugué de la partie écrite du membre de droite.

L'annulation des termes en facteur  $e^{jT_0}$  dans le membre de droite de (3.10), causant des termes séculaires, conduit à résoudre l'équation différentielle suivante pour l'amplitude complexe  $A$  :

$$2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 3\alpha A |A|^2 - \frac{k}{2} \exp(j\sigma T_1) = 0. \quad (3.11)$$

En passant en coordonnées polaires  $A = \frac{1}{2}ae^{j\varphi}$  et en notant  $\partial() / \partial T_1 = ()'$ , l'équation (3.11) devient :

$$j(a' + aj\varphi' + \mu a) + \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{k}{2} \cos(\sigma T_1 - \varphi) - j\frac{k}{2} \sin(\sigma T_1 - \varphi) \quad (3.12)$$

qui, lorsque l'on sépare les parties imaginaire et réelle devient :

$$a' = -\mu a + \frac{k}{2} \sin(\sigma T_1 - \varphi), \quad (3.13a)$$

$$a\varphi' = \frac{3\alpha a^3}{8} - \frac{k}{2} \cos(\sigma T_1 - \varphi). \quad (3.13b)$$

La solution approchée de (3.6) intermédiaire (celle où on se contente d'annuler les termes en facteur  $e^{iT_0}$  dans le membre de droite de (3.10) sans aller jusqu'à sa résolution complète) s'écrit donc sous la forme suivante :

$$u = a(T_1) \cos(T_0 + \varphi(T_1)) \quad (3.14)$$

où  $a$  et  $\varphi$  (lentement variables) sont solutions du système d'équations différentielles (3.13).

Nous allons maintenant étudier les positions d'équilibre de (3.13) puis analyser leur stabilité. Tout d'abord le système est transformée en **système autonome** (c.à.d ne dépendant pas explicitement du temps) on posant :

$$\gamma = \sigma T_1 - \varphi \quad (3.15)$$

qui permet d'écrire (3.13) comme suit

$$a' = f(a, \gamma) = H_1(a) + B \sin \gamma, \quad (3.16a)$$

$$\gamma' = g(a, \gamma) = \sigma - H_2(a) + \frac{B}{a} \cos \gamma. \quad (3.16b)$$

avec  $H_1(a) = -\mu a$ ,  $H_2(a) = \frac{3\alpha a^2}{8}$  et  $B = \frac{k}{2}$ .

De plus, l'Éq. (3.15) implique que  $\varphi = \sigma T_1 - \gamma$ , d'où  $T_0 + \varphi = T_0 + \sigma T_1 - \gamma = \Omega t - \gamma$  et (3.14) devient :

$$u = a \cos(\Omega t - \gamma) \quad (3.17)$$

Les position d'équilibre  $(a^e, \gamma^e)$  sont solutions de  $\{a' = 0, \gamma' = 0\}$  qui est équivalent à

$$\sin \gamma^e = -\frac{H_1(a^e)}{B} = \frac{2\mu a^e}{k} \quad (3.18a)$$

$$\cos \gamma^e = -\frac{a^e(\sigma - H_2(a^e))}{B} = \frac{2a^e}{k} \left( \frac{3\alpha a^2}{8} - \sigma \right). \quad (3.18b)$$

En sommant les équations précédentes élevées au carré, l'équation suivante est obtenue :

$$a^{e2} (\sigma - H_2(a^e))^2 + H_1(a^e)^2 = B^2 \quad (3.19)$$

puis en faisant le rapport on obtient :

$$\tan \gamma^e = \frac{H_1(a^e)}{a^e \sigma - a^e H_2(a^e)}. \quad (3.20)$$

L'Éq. (3.19) est une équation du second degré en  $\sigma$  qui peut être résolue analytiquement, cela donne :

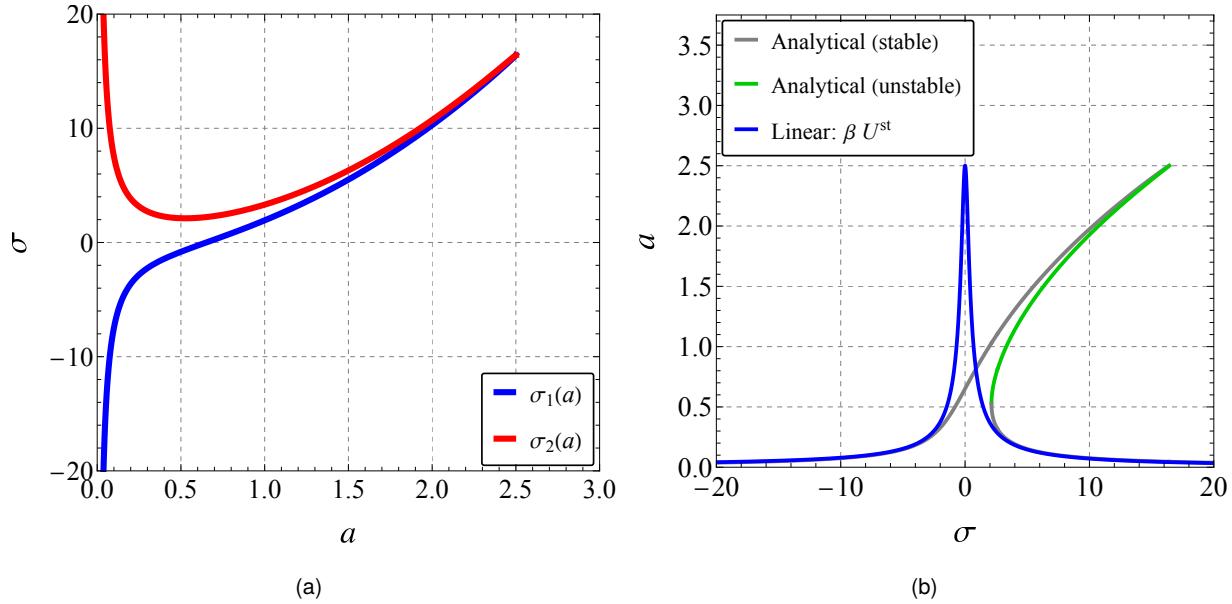
$$\sigma_1(a^e) = H_2(a^e) - \frac{\sqrt{B^2 - H_1(a^e)^2}}{a^e} = \frac{3a^{e3}\alpha - 4\sqrt{k^2 - 4a^{e2}\mu^2}}{8a^e} \quad (3.21a)$$

$$\sigma_2(a^e) = H_2(a^e) + \frac{\sqrt{B^2 - H_1(a^e)^2}}{a^e} = \frac{3a^{e3}\alpha + 4\sqrt{k^2 - 4a^{e2}\mu^2}}{8a^e}. \quad (3.21b)$$

qui sont représentés en Fig. 3.1(a). L'Éq. (3.19) est aussi une équation du troisième degré en  $(a^e)^2$  que l'on peut aussi résoudre analytiquement, même si cela est plus fastidieux.

Pour connaître la stabilité des points fixes précédemment déterminé, on calcule la matrice jacobienne  $J(a, \gamma)$  de (3.16)

$$J(a, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g}{\partial a} & \frac{\partial g}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H'_1(a) & B \cos(\gamma) \\ -\frac{B \cos(\gamma)}{a^2} - H'_2(a) & -\frac{B \sin(\gamma)}{a} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$



**FIGURE 3.1.** Points fixes de (3.16) : amplitudes  $a^e$ . (a) Dans le plan  $(a, \sigma)$  et (b) dans le plan  $(\sigma, a)$  avec indication de stabilité comparaison avec le cas linéaire. Les paramètres suivants sont utilisés :  $\mu = 0.3$ ,  $\alpha = 7$  et  $k = 1.5$ .

que l'on estime en  $(a^e, \gamma^e)$  en utilisant (3.18), cela donne :

$$J(a^e, \gamma^e) = \begin{pmatrix} H'_1(a^e) & a^e(H_2(a^e) - \sigma) \\ \frac{-a^e H'_2(a^e) - H_2(a^e) + \sigma}{a^e} & \frac{H_1(a^e)}{a^e} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

dont les valeurs propres s'expriment de la manière suivante :

$$\lambda_- = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) - \sqrt{\Delta}}{2a^e} \quad (3.24a)$$

$$\lambda_+ = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) + \sqrt{\Delta}}{2a^e}. \quad (3.24b)$$

avec

$$\Delta = 4a^{e^3}(\sigma - H_2(a^e))H'_2(a^e) - 4a^{e^2}(\sigma - H_2(a^e))^2 - 4H_1(a^e)H'_1(a^e) + (H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e))^2. \quad (3.25)$$

En remplaçant  $\sigma$  dans (3.24) par ses expressions  $\sigma_{1/2}(a^e)$  données par (3.21a) et (3.21b) on obtient :

$$\lambda_{1-} = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) - \sqrt{\Delta_1}}{2a^e} \quad (3.26a)$$

$$\lambda_{1+} = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) + \sqrt{\Delta_1}}{2a^e} \quad (3.26b)$$

et

$$\lambda_{2-} = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) - \sqrt{\Delta_2}}{2a^e} \quad (3.27a)$$

$$\lambda_{2+} = \frac{H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) + \sqrt{\Delta_2}}{2a^e}, \quad (3.27b)$$

respectivement, avec

$$\Delta_1 = (H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e))^2 - 4a^2 \sqrt{B^2 - H_1(a^e)^2} \sigma'_1(a^e) \quad (3.28a)$$

$$\Delta_2 = (H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e))^2 + 4a^2 \sqrt{B^2 - H_1(a^e)^2} \sigma'_1(a^e) \quad (3.28b)$$

Comme  $H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e) = -2a^e \mu < 0$  et que l'on observe sur la Fig. 3.1(a) que :

- $\sigma'_1(a^e)$  est toujours positive, alors  $\sqrt{\Delta_1} < |H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e)|$  et donc  $\lambda_{1-} < 0$  et  $\lambda_{1+} < 0$ . Par conséquent, la solution  $\sigma_1(a^e)$  est toujours stable.
- $\sigma_2(a^e)$  est d'abord décroissante ( $\sigma'_2(a^e) < 0$ ) puis croissante ( $\sigma'_2(a^e) > 0$ ) :
  - Si  $\sigma'_2(a^e) < 0$  alors  $\sqrt{\Delta_2} < |H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e)|$  et  $\sigma_2(a^e)$  est stable car  $\lambda_{2-} < 0$  et  $\lambda_{2+} < 0$ .
  - Si  $\sigma'_2(a^e) > 0$  alors  $\sqrt{\Delta_2} > |H_1(a^e) + a^e H'_1(a^e)|$  et donc  $\sigma_2(a^e)$  est instable car  $\lambda_{2-} < 0$  et  $\lambda_{2+} > 0$ .

La stabilité des solutions est représentée en Fig. 3.1(b) (en vert pour la branche stable et en gris pour les branches instables) où le cas linéaire est également représenté pour comparaison.

Si  $\sigma$  est le paramètre de bifurcation considéré, il y a donc présence d'un phénomène de **stabilité multiple** (ou **multistabilité**) puisque pour une valeur de  $\sigma$  donnée (par exemple  $\sigma = 3$ ) il y a coexistence de deux solutions stables.

C'est la condition initiale qui détermine quel point fixe va être effectivement atteint par le système. Pour illustrer cela, la Fig. 3.2 montre deux simulations des systèmes (3.6) et (3.16) pour  $\sigma = 3$  et  $\epsilon = 0.01$  et pour deux conditions initiales  $P_1 = (a_0, \gamma_0) = (0.2, 1)$  et  $P_2 = (a_0, \gamma_0) = (0.86, 1)$ . À partir de (3.17) on a :

$$s_0 = a_0 \cos \gamma_0 \quad \text{et} \quad \dot{s}_0 = a_0 \sin \gamma_0, \quad (3.29)$$

cf. Remarque ci-dessous.

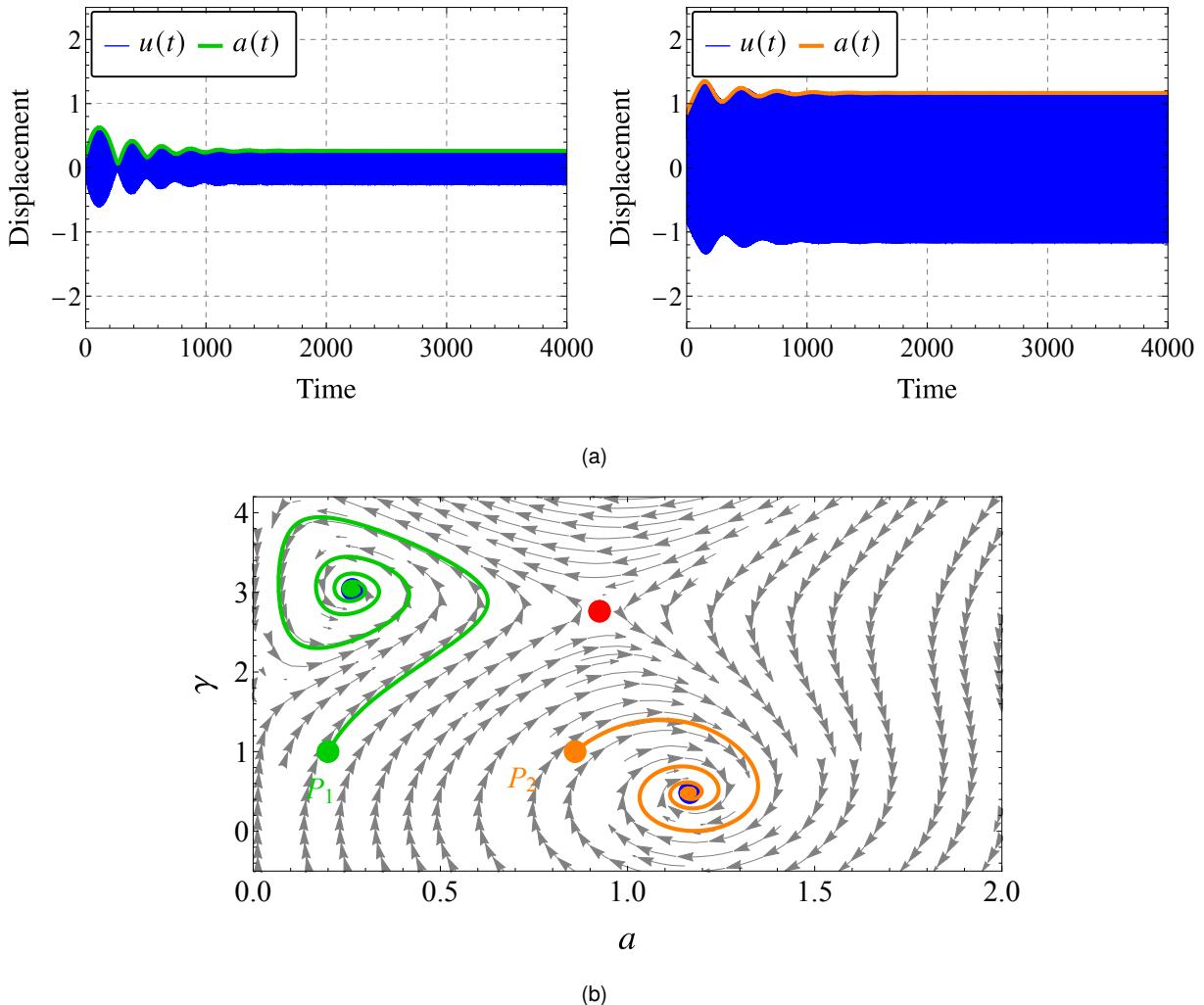
**Remarque.** En effet :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{d}{dt} (a(\epsilon t) \cos(\Omega t - \gamma)) \\ &= \frac{da(\epsilon t)}{dt} \cos(\Omega t - \gamma(\epsilon t)) - a(\epsilon t) \left( \Omega - \frac{d\gamma(\epsilon t)}{dt} \right) \sin(\Omega t - \gamma(\epsilon t)) \\ &= \epsilon a'(\epsilon t) \cos(\Omega t - \gamma(\epsilon t)) - a(\epsilon t) (1 + \epsilon \sigma - \epsilon \gamma'(\epsilon t)) \sin(\Omega t - \gamma(\epsilon t)) \\ &= -a(\epsilon t) \sin(\Omega t - \gamma(\epsilon t)) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

et donc à  $t = 0$  on a bien  $\dot{s}_0 \approx a_0 \sin(\gamma_0)$ .

La figure montre l'amplitude en fonction du temps (cf. Fig. 3.2(a)) et la trajectoire dans le plans  $(a, \gamma)$  comparé aux lignes de champ de (3.16) (cf. Fig. 3.2(b)). On observe en effet que selon la position des conditions initiales dans le plan  $(a, \gamma)$ , ces dernières se trouvent sur des lignes de champ qui conduisent à deux points fixes stables différents (points bleus sur la figures, le point rouge représente le point fixe instable). Ceci illustre la notion de bassin d'attraction déjà évoquée en Sect. 2.1.

Les résultats précédents (calcul des positions d'équilibre de leur stabilité) sont résumés dans le diagramme de bifurcation présenté en Fig. 3.3. Le diagramme de bifurcation théorique y est également comparé à l'amplitude du régime établi établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (3.16) (en bleu à gauche et en rouge à droite). Ces derniers sont obtenus en intégrant (3.3) sur une période  $T$  avec des conditions initiales  $(a_0, \gamma_0)$ . On prend ensuite la valeur suivante de  $\sigma$  (en augmentant ou en diminuant) et on effectue une nouvelle simulation en prenant comme conditions initiales les valeurs

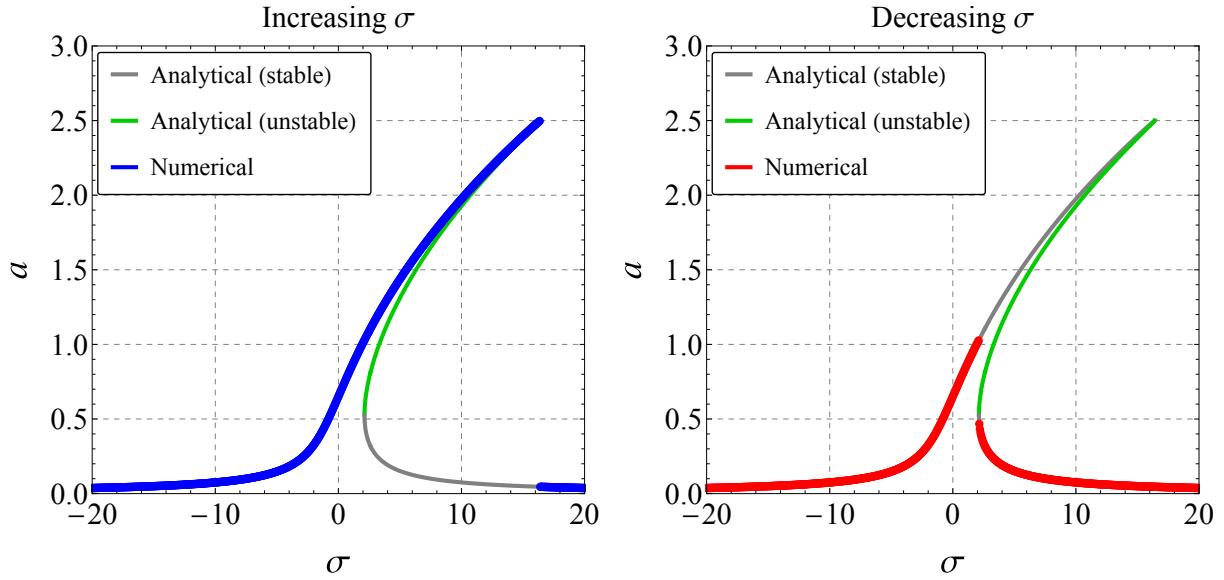


**FIGURE 3.2.** Intégration numérique des systèmes (3.6) et (3.16) pour  $\sigma = 3$  et pour deux conditions initiales  $P_1 = (0.2, 1)$  et  $P_2 = (0.86, 1)$ . La figure montre (a) l'amplitude en fonction du temps et (b) la trajectoire dans le plans  $(a, \gamma)$  comparé aux lignes de champ de (3.16). Les points bleus et rouge représentent respectivement les points fixes stables et instable. Même paramètres que dans la Fig. 3.1 avec  $\epsilon = 0.01$ .

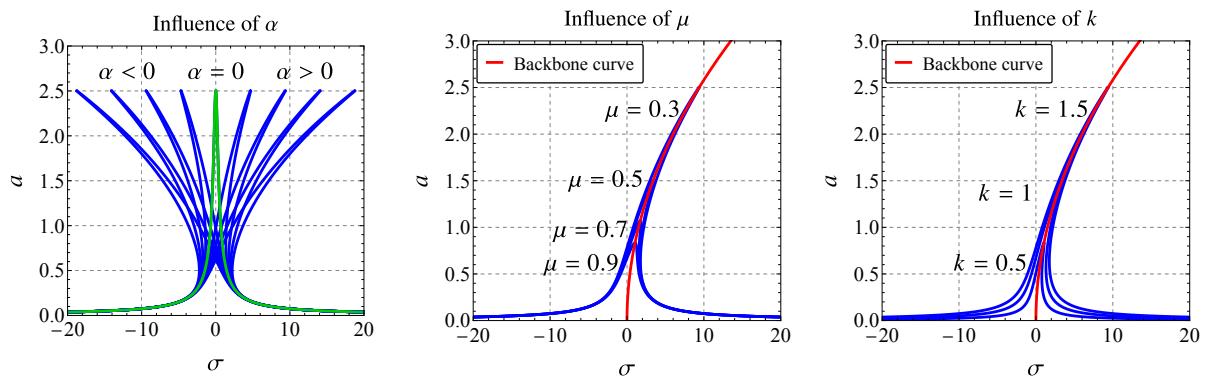
$a(T)$  et  $\gamma(T)$  de la simulation précédente. Les valeurs de  $a(T)$  et  $\gamma(T)$  sont enregistrées puis tracées en fonction de  $\sigma$  (ici on ne trace que l'amplitude).

La figure met en évidence un **phénomène d'hystérésis**. En effet, lorsque l'on augmente  $\sigma$ , on suit la branche du point fixe  $a_1$  (qui est stable) jusqu'au sommet de la courbe puis on saute sur la branche correspondant à  $a_2$  (qui est stable également). Lorsque l'on diminue  $\sigma$ , on suit la branche correspondant à  $a_2$  jusqu'au point (où un changement de stabilité est observé) puis on saute sur la branche de  $a_1$ . Le chemin parcouru en montée est donc différent de celui parcouru en descente ce qui met en évidence le phénomène d'hystérésis évoqué plus haut.

La Fig. 3.4 montre quant à elle comment évolue la réponse du système quand la raideur non linéaire  $\alpha$ , l'intensité du forçage  $k$  et le coefficient d'amortissement  $\mu$  varient. Quand  $\alpha$  varie on retrouve les effets raidissant et amortissant déjà évoqués en Sect. 1.2.2. Lorsque  $k$  et  $\mu$  varient cela joue sur l'amplitude des oscillations comme dans le cas d'une résonance linéaire.



**FIGURE 3.3.** Diagramme de bifurcation théorique (vert pour la branche stable et gris pour les branches instables) comparé à l'amplitude du régime établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (3.16) (en bleu à gauche pour  $\sigma$  croissant et en rouge à droite pour  $\sigma$  décroissant). Même paramètres que dans la Fig. 3.1 avec  $\epsilon = 0.01$ .



**FIGURE 3.4.** Évolution de l'allure du diagramme de bifurcation quand la raideur non linéaire  $\alpha$  (à gauche), l'intensité du forçage  $k$  (au centre) et le coefficient d'amortissement  $\mu$  (à droite) varient. Même paramètres que dans la Fig. 3.1 avec  $\epsilon = 0.01$ . Au centre et à droite la backbone curve est aussi représentée (en rouge, cf. Sect. 3.2.2).

### 3.2.2 Backbone curve

La *backbone curve* correspond, en supposant une solution périodique, à la relation entre amplitude  $a$  et pulsation (ici représenté par le paramètre  $\sigma$ ) pour l'oscillateur (ici de Duffing) libre et sans amortissement. Il est assez simple d'en obtenir un expression approchée à partir des résultats précédents. En effet, en posant  $\mu = 0$  et  $k = 0$  dans (3.21) cela donne :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = H_2(a) = \frac{3\alpha a^2}{8} \quad (3.30)$$

ou encore

$$a = 2\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}\sqrt{\sigma}. \quad (3.31)$$

La backbone curve est illustrée en Fig. 3.4 (centre et droite). Cela permet de voir que cette courbe peut, dans le cas de la réponse forcée et pour la résonance primaire, s'interpréter comme le « squelette » de la réponse.

### 3.3 Résonances secondaires

#### 3.3.1 Forçage fort loin de la résonance primaire

Pour comprendre comment les résonances secondaires peuvent exister il faut maintenant supposer un forçage fort en traitant directement l'Éq. (3.4) (i.e. sans faire l'hypothèse  $K = \epsilon k$ ).

Toujours en supposant :

$$u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1) + \dots, \quad (3.32)$$

en prenant en compte les expression des dérivées temporelles (2.106) et (2.107) dans (3.4) puis en équilibrant les termes en puissances de  $\epsilon$  on aboutit, pour les ordres 0 et 1, à :

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = K \cos(\Omega T_0) \quad (3.33a)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - 2\mu \frac{\partial u_0}{\partial T_0} - \alpha u_0^3 \quad (3.33b)$$

L'équation à l'ordre 0 n'est plus homogène, elle correspond en fait à un oscillateur linéaire forcé harmoniquement dont la solution générale, sous forme complexe est :

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{iT_0} + \Lambda e^{i\Omega T_0} + c.c. \quad (3.34)$$

avec

$$\Lambda = \frac{1}{2} \frac{K}{1 - \Omega^2}. \quad (3.35)$$

La solution  $u_0$  précédente est introduite dans l'équation de l'ordre  $\epsilon^1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = & - \left[ 2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 6\alpha A \Lambda^2 + 3\alpha A |A|^2 \right] e^{iT_0} \\ & - \alpha \left[ A^3 e^{3iT_0} + \Lambda^3 e^{3i\Omega T_0} \right. \\ & + 3A^2 \Lambda e^{j(2+\Omega)T_0} + 3A^* \Lambda e^{j(\Omega-2)T_0} \\ & + 3A \Lambda^2 e^{j(1+2\Omega)T_0} + 3A \Lambda^2 e^{j(1-2\Omega)T_0} \left. \right] \\ & - \Lambda [2j\mu\Omega + 3\alpha\Lambda^2 + 6\alpha A A^*] e^{i\Omega T_0} + c.c. \end{aligned} \quad (3.36)$$

En plus des termes proportionnels à  $e^{iT_0}$  (dus à la non-linéarité cubique) et  $e^{i\Omega T_0}$  (dus au forçage), d'autres termes forçants résonants peuvent exister si :

(i)  $\boxed{\Omega \approx 0}$  (forçage statique), en effet dans ce cas on a :

$$e^{j(1-2\Omega)T_0} \approx e^{j(1+2\Omega)T_0} \approx e^{iT_0}.$$

(ii)  $\boxed{\Omega = \frac{1}{3}}$ , car dans ce cas :

$$e^{3j\Omega T_0} = e^{iT_0}.$$

La prise en compte de ces termes permet de mettre en évidence le phénomène de **résonance super-harmonique**.

(iii)  $\boxed{\Omega = 3}$ , car dans ce cas :

$$e^{j(\Omega-2)T_0} = e^{iT_0}.$$

La prise en compte de ces termes permet de mettre en évidence le phénomène de **résonance sous-harmonique**.

Ces derniers seront donc à l'origine de termes séculaires dans la solution. Dans les sections suivantes seuls les cas des résonances super-harmonique et sous-harmonique (deuxième et troisième cas ci-dessus) seront étudiés. Pour ce faire les méthodes des échelles multiples sera de nouveaux utilisée.

Avant cela traitons le cas **non résonant**. Ce dernier correspond aux situations où  $\Omega$  est éloignée de 1, 0,  $\frac{1}{3}$  et 3. Dans ce cas, l'annulation des termes séculaires dans le membre de droite de (3.36) conduit à la résolution de :

$$2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 6\alpha A \Lambda^2 + 3\alpha A |A|^2 = 0 \quad (3.37)$$

qui, en posant  $A = \frac{1}{2}ae^{i\varphi}$  et en séparant les parties imaginaire et réelle, devient :

$$a' = -\mu a \quad (3.38a)$$

$$a\varphi' = 3\alpha \left( \Lambda^2 + \frac{a^2}{8} \right) a \quad (3.38b)$$

En première approximation la solution du problème dans le cas non résonant est donnée par :

$$u = a(\epsilon t) \cos(t + \varphi(\epsilon t)) + \frac{K}{1 - \Omega^2} \cos \Omega t. \quad (3.39)$$

De (3.38a) on tire que  $a(\epsilon t) = a_0 e^{-\mu \epsilon t}$ . Par conséquent, après un **régimes transitoire** où  $a(\epsilon t)$  décroît jusqu'à 0, seul reste la régime stationnaire

$$\frac{K}{1 - \Omega^2} \cos \Omega t \quad (3.40)$$

qui est le même que dans le cas linéaire. Seule la partie transitoire est affectée par la non linéarité par le biais de  $\varphi$ . À noter que la solution (3.39) n'est valable qu'en dehors des résonances primaire et secondaires et du forçage statique.

### 3.3.2 Résonance super-harmonique $\Omega \approx \frac{1}{3}$

On étudie ce qui se passe quand  $\Omega$  est proche de  $\frac{1}{3}$ , pour cela on introduit de nouveau le paramètre  $\sigma$  tel que cette fois :

$$3\Omega = 1 + \epsilon\sigma. \quad (3.41)$$

À noter que dans ce cas nous avons :  $3\Omega T_0 = (1 + \epsilon\sigma) T_0 = T_0 + \sigma T_1$ .

En observant l'Éq. (3.36) on voit que, dans le cas d'une résonance super-harmonique, l'annulation des termes séculaires conduit à l'équation différentielle suivante :

$$2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 6\alpha A \Lambda^2 + 3\alpha A |A|^2 + \alpha \Lambda^3 \exp(j\sigma T_1) = 0. \quad (3.42)$$

En posant  $A = \frac{1}{2}ae^{i\varphi}$  et en séparant les parties imaginaire et réelle on obtient :

$$a' = -\mu a - \alpha \Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \varphi) \quad (3.43a)$$

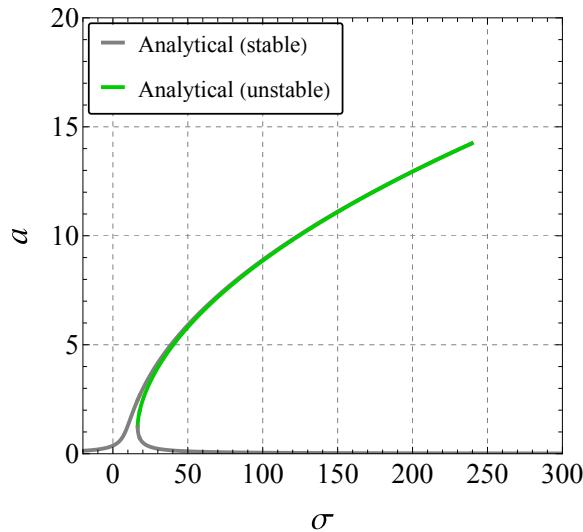
$$a\varphi' = 3\alpha \left( \Lambda^2 + \frac{a^2}{8} \right) a + \alpha \Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \varphi) \quad (3.43b)$$

où la notation  $\partial() / \partial T_1 = ()'$  a de nouveau été utilisée.

Comme on l'a fait précédemment dans le cas de la résonance primaire, le système (3.43) (non autonome) est transformé en système autonome en posant  $\gamma = \sigma T_1 - \varphi$  :

$$a' = -\mu a - \alpha \Lambda^3 \sin \gamma = f(a, \gamma) = H_1(a) + B \sin \gamma \quad (3.44a)$$

$$\gamma' = \sigma - 3\alpha \Lambda^2 - \frac{3\alpha}{8} a^2 - \frac{\alpha \Lambda^3}{a} \cos \gamma = g(a, \gamma) = \sigma - H_2(a) + \frac{B}{a} \cos \gamma \quad (3.44b)$$



**FIGURE 3.5.** Points fixes (amplitudes  $a^e$ ) de (3.44). La paramètre suivantes sont utilisés :  $\mu = 0.3$ ,  $\alpha = 3$  et  $K = 2$ .

En première approximation la solution du problème initial est donnée par :

$$u = a \cos(3\Omega t - \gamma) + \frac{K}{1 - \Omega^2} \cos \Omega t \quad (3.45)$$

où  $a$  et  $\gamma$  sont solutions du système d'équations différentielles (3.44).

**Remarque.** La pulsation d'oscillation libre est  $3\Omega$ , c'est pour cela que l'on parle de **résonance super-harmonique** (*superharmonic resonance*)

La solution (3.45) contient donc un terme d'oscillations libre<sup>1</sup> de période  $T = \frac{2\pi}{3\Omega}$  et une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage et donc de période  $\frac{2\pi}{\Omega} = 3T$ .

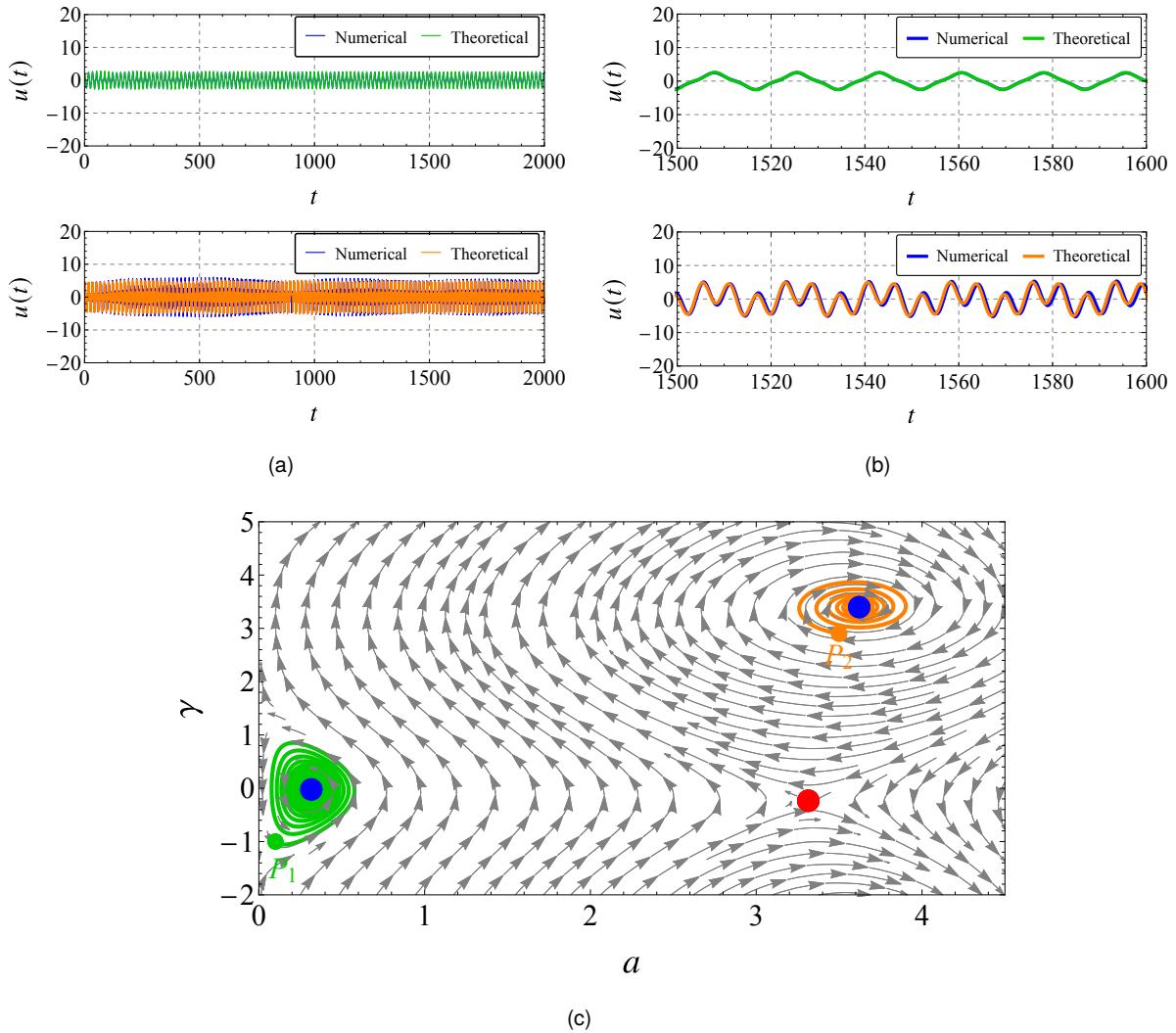
Le système d'équations (3.44) a la même forme que (3.16), l'analyse faire en Sect. 3.2 peut donc être reproduite de façon similaire ici. En particulier, l'équivalent de l'Eq. (3.19) est obtenue, c'est également une équation du second degré en  $\sigma$  (et du troisième degré en  $a^{e2}$ ),

$$a^{e2} \left[ \mu^2 + \left( \sigma - 3\alpha\Lambda^2 - \frac{3\alpha}{8} a^{e2} \right)^2 \right] = \alpha^2 \Lambda^6, \quad (3.46)$$

qui peut être résolue analytiquement. La stabilité de ces solutions est également calculée par un raisonnement identique à celui effectué après l'Eq. (3.28). Le résultat de l'analyse est montré en Fig. 3.5, qui a une allure similaire à celle observée en Fig. 3.1(b).

Comme dans le cas de la résonance primaire un bistabilité est observée et c'est la condition initiale qui détermine quel point fixe va être effectivement atteint par le système. En effet, la Fig. 3.6 montre deux simulations des systèmes (3.4) et (3.44) pour  $\sigma = 25$  et  $\epsilon = 0.003$  et pour deux conditions initiales  $P_1 = (0.1, -1)$  et  $P_2 = (3.5, 2.9)$ . La figure montre  $u$  en fonction du temps (cf. Fig. 3.6(a)) où dans le cas de la solution théorique  $u$  est donné par (3.45) avec  $a$  et  $\gamma$  provenant de l'intégration numérique de (3.44)) et la trajectoire dans le plans  $(a, \gamma)$  comparé aux lignes de champ de (3.16) (cf. Fig. 3.6(c)). On observe en effet que selon la position des conditions initiales dans le plan  $(a, \gamma)$ , ces dernières se trouvent sur des lignes de champ qui conduisent à deux points fixes stables différents (points bleus sur la figures, le point

1. Elle correspond en effet à la solution libre de (3.33a) mais il faut pas oublier que  $a$  et  $\gamma$  dépendent du forçage.

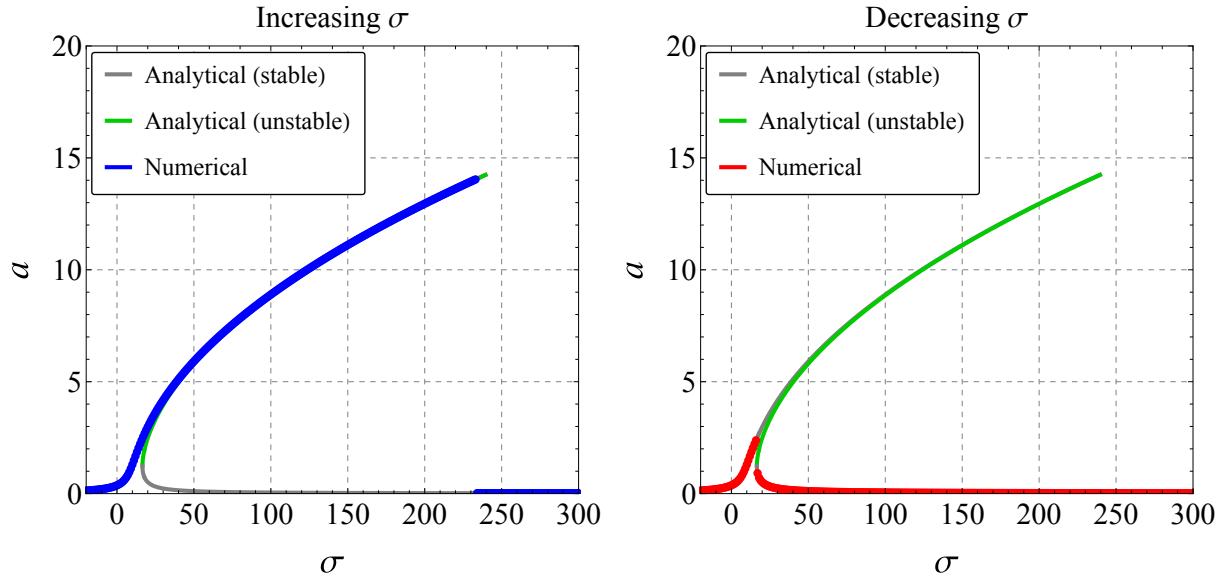


**FIGURE 3.6.** Intégration numérique des systèmes (3.4) et (3.44) pour  $\sigma = 25$  et pour deux conditions initiales  $P_1 = (0.1, -1)$  et  $P_2 = (3.5, 2.9)$ . La figure montre (a)  $u$  en fonction du temps et (b) la trajectoire dans le plans  $(a, \gamma)$  comparé aux lignes de champ de (3.44). Les points bleus et rouge représentent respectivement les points fixes stables et instable. Même paramètres que dans la Fig. 3.5 avec  $\epsilon = 0.003$ . (b) Zoom de la Fig. 3.6(a) entre  $t = 1500$  et  $t = 1600$ .

rouge représentant le point fixe instable). Ceci renvoie une nouvelle fois à la notion de bassin d'attraction (cf. Sect. 2.1).

Comme évoquée précédemment, dans chacune des deux situations,  $u(t)$  est la somme d'un terme d'oscillations libre de période  $T = \frac{2\pi}{3\Omega}$  et une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage et donc de période  $3T$ . La Fig. 3.6(b), qui représente un zoom de la Fig. 3.6(a) entre  $t = 1500$  et  $t = 1600$ , montre que c'est effectivement le cas avec cependant une plus forte présence de la composante à  $3T$  dans le premier cas (en haut) et une plus forte présence de la composante à  $T$  pour le second (en bas). Ceci s'explique par le fait que l'on a  $a^e < 2\Lambda$  dans le premier cas et  $a^e > 2\Lambda$  dans le second.

Des simulations numériques similaire à celles effectuée pour obtenir la Fig. 3.3 sont présentées en Fig. 3.7. On observe un **phénomène d'hystérésis** identique à celui observé dans le cas de résonance primaire. Lorsque l'on augmente  $\sigma$ , on suit la branche du point fixe  $a_1$  (qui est stable) jusqu'au sommet de la courbe puis on saute sur la branche correspondant à  $a_2$  (qui est stable également). Lorsque l'on diminue  $\sigma$ , on suit la branche correspondant à  $a_2$  jusqu'au point (où un changement de stabilité est observé) puis on saute sur la branche de  $a_1$ . Le chemin parcouru en montée est donc différent de celui parcouru en descente.



**FIGURE 3.7.** Diagramme de bifurcation théorique (vert pour la branche stable et gris pour les branches instables) comparé à l'amplitude du régime établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (3.44) (en bleu à gauche pour  $\sigma$  croissant et en rouge à droite pour  $\sigma$  décroissant). Même paramètres que dans la Fig. 3.5 avec  $\epsilon = 0.003$ .

### 3.3.3 Résonance sous-harmonique $\Omega \approx 3$

On étudie ce qui se passe quand  $\Omega$  est proche de 3, pour cela on introduit de nouveau le paramètre  $\sigma$  tel que :

$$\Omega = 3 + \epsilon\sigma \quad (3.47)$$

À noter que dans ce cas nous avons :  $(\Omega - 2) T_0 = (3 + \epsilon\sigma - 2) T_0 = T_0 + \sigma T_1$

En observant l'Eq. (3.36) on voit que, dans le cas d'une résonance sous-harmonique, l'annulation des termes séculaires conduit à l'équation différentielle suivante :

$$2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} + \mu A \right) + 6\alpha A \Lambda + 3\alpha A |A|^2 + \alpha A^* \Lambda \exp(j\sigma T_1) = 0 \quad (3.48)$$

En posant  $A = \frac{1}{2}ae^{j\varphi}$  et en séparant les parties imaginaire et réelle on obtient :

$$a' = -\mu a - \frac{3\alpha\Lambda}{4}a^2 \sin(\sigma T_1 - 3\varphi) \quad (3.49a)$$

$$a\varphi' = 3\alpha \left( \Lambda^2 + \frac{a^2}{8} \right) a + \frac{3\alpha\Lambda}{4}a^2 \cos(\sigma T_1 - 3\varphi) \quad (3.49b)$$

Le système précédent (non autonome) est transformé en système autonome en posant  $\gamma = \sigma T_1 - 3\varphi$  :

$$a' = -\mu a - \frac{3\alpha\Lambda}{4}a^2 \sin \gamma \quad (3.50a)$$

$$a\gamma' = \left( \sigma - 9\alpha\Lambda^2 \right) a - \frac{9\alpha}{8}a^3 - \frac{9\alpha\Lambda}{4} \cos \gamma \quad (3.50b)$$

En première approximation la solution du problème initial est donnée par :

$$u = a \cos \left( \frac{1}{3}(\Omega t - \gamma) \right) + \frac{K}{1 - \Omega^2} \cos \Omega t \quad (3.51)$$

où  $a$  et  $\gamma$  sont solutions du système d'équations différentielles (3.50).

**Remarque.** La pulsation d'oscillation libre est  $\frac{1}{3}\Omega$ , c'est pour cela que l'on parle de **résonance sous-harmonique** (*subharmonic resonance*)

La solution (3.51) contient donc un terme d'oscillations libre de période  $T = 3 \times \frac{2\pi}{\Omega}$  et une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage et donc de période  $\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T}{3}$ .

Les positions d'équilibre de (3.50), toujours notées  $(a^e, \gamma^e)$ , sont solutions de  $\{a' = 0, \gamma' = 0\}$ . Cette dernière équation est équivalente à :

$$\frac{9\alpha\Lambda}{4}a^{e2}\sin\gamma^e = -3\mu a^e \quad (3.52a)$$

$$\frac{9\alpha\Lambda}{4}a^{e2}\cos\gamma^e = a^e \left( \sigma - 9\alpha\Lambda^2 - \frac{9\alpha}{8}a^{e2} \right) \quad (3.52b)$$

En sommant les équations précédentes élevées au carré, on aboutit à l'équation suivante :

$$a^{e2} \left[ \mu^2 + \left( \sigma - 9\alpha\Lambda^2 - \frac{9\alpha}{8}a^{e2} \right)^2 \right] = a^{e4} \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16}. \quad (3.53)$$

Contrairement à la résonance primaire et à la résonance super-harmonique, la solution triviale  $a^e = 0$  existe. Les solutions non triviales sont solution de :

$$\mu^2 + \left( \sigma - 9\alpha\Lambda^2 - \frac{9\alpha}{8}a^{e2} \right)^2 = a^{e2} \frac{81\alpha^2\Lambda^2}{16} \quad (3.54)$$

qui est une équation quadratique en  $a^{e2}$  dont les solutions sont sous la forme :

$$a^{e2} = p \pm \sqrt{p^2 - q} \quad (3.55)$$

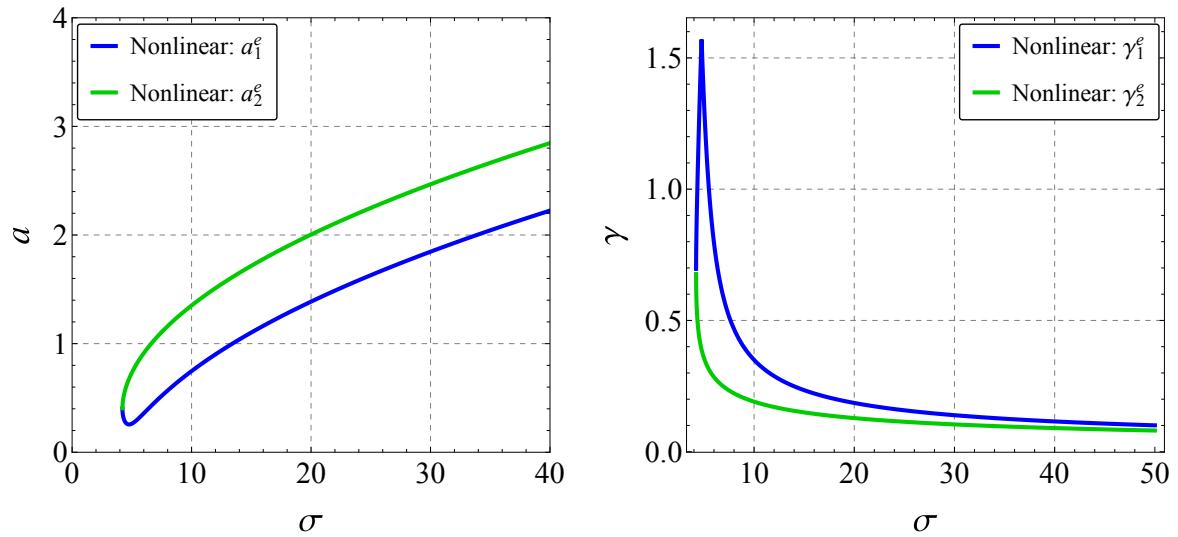
avec

$$p = \frac{8\sigma}{9\alpha} - 6\Lambda^2 \quad \text{et} \quad q = \frac{64}{81\alpha^2} \left[ 9\mu^2 + \left( \sigma - 9\alpha\Lambda^2 \right)^2 \right]. \quad (3.56)$$

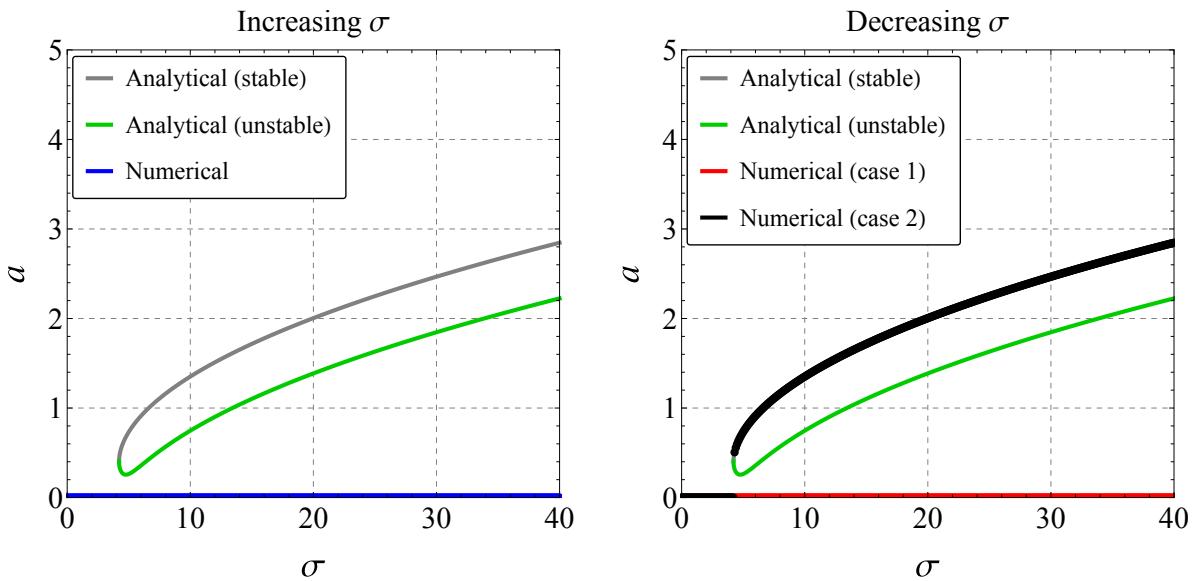
Les points fixes, donnée par (3.55), sont représentés en Fig. 3.8. On observe une forme bien différente de ce que nous avions dans les cas de la résonance primaire et de la résonance super-harmonique.

L'analyse de stabilité de ces points fixes est effectuée de façon similaire à ce qui a été réalisé à la section précédente (cf. Éq. (3.16) à (3.23)) en évaluant le signe du déterminant de la matrice jacobienne de (3.50) évaluée aux points fixes. L'analyse de stabilité indique que  $a_1^e$  est instable et que  $a_2^e$  et point fixe triviale sont stables.

Le diagramme de bifurcation théorique est comparé à l'amplitude du régime établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (3.50) en Fig. 3.9. Dans le cas d'un  $\sigma$  décroissant, deux cas sont représentés : en rouge le cas où la première simulation (pour  $\sigma = 40$ ) est initialisée près du point fixe triviale et en noir le cas où la première simulation est initialisée près du point fixe non triviale stable. On observe que si le système est proche du point fixe triviale une variation de  $\sigma$  ne le fera pas changer d'état. Seule une perturbation importante capable d'amener le système dans le bassin d'attraction de  $a_2^e$  pourra faire changer le système d'état.



**FIGURE 3.8.** Points fixes de (3.50) : amplitudes  $a^e$  (à gauche) et phases  $\gamma^e$  (à droite). La paramètre suivantes sont utilisés :  $\mu = 0.3$ ,  $\alpha = 5$  et  $K = 5$ .



**FIGURE 3.9.** Diagramme de bifurcation théorique (vert pour la branche stable et gris pour les branches instables) comparé à l'amplitude du régime établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (3.50) (en bleu à gauche pour  $\sigma$  croissant et en rouge et noire à droite pour  $\sigma$  décroissant). Dans le cas d'un  $\sigma$  décroissant, deux cas sont représentés : en rouge le cas où la première simulation (pour  $\sigma = 40$ ) est initialisée près du point fixe triviale (cas 1) et en noir le cas où la première simulation est initialisée près du point fixe non triviale stable (cas 2). Même paramètres que dans la Fig. 3.8 avec  $\epsilon = 0.003$ .



# Oscillations auto-entretenues

## Sommaire

<b>4.1 Amortissement négatif induit par le frottement</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1.1 Équation du modèle . . . . .	63
4.1.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale . . . . .	64
4.1.3 Solution analytique approchée par la méthode des échelles multiples . . . . .	64
4.1.3.1 Solution à l'ordre 1 . . . . .	64
4.1.3.2 Solution intermédiaire . . . . .	67
4.1.3.3 Diagramme de bifurcation théorique . . . . .	68
<b>4.2 Instabilité aéroélastique d'une aile d'avion</b> . . . . .	<b>69</b>
4.2.1 Équations du modèle . . . . .	69
4.2.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale . . . . .	72
4.2.3 Étude des cycles limites par la méthode de moyennage . . . . .	73
4.2.3.1 Calcul de l'amplitude des cycles limites . . . . .	73
4.2.3.2 Analyses de stabilité des cycles limites . . . . .	77

---

## 4.1 Amortissement négatif induit par le frottement

### 4.1.1 Équation du modèle

Le modèle étudié ici est celui présenté en Sect. 1.2.3. L'équation du mouvement associé à ce modèle est l'Eq. (1.16), réécrite ci-dessous avec quelques changements de notation :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - 2\hat{\gamma}\frac{du}{dt} + \omega_0^2u + \hat{\alpha}_3\left(\frac{du}{dt}\right)^3 = 0. \quad (4.1)$$

Procédons maintenant à l'adimensionnement de (4.1) en posant

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \text{et} \quad \tilde{t} = \omega_0 t. \quad (4.2)$$

où  $U$  est une longueur caractéristique du système.

Avec (4.2), l'Eq. (4.1) s'écrit :

$$\omega_0^2 U \frac{d^2\tilde{u}}{d\tilde{t}^2} - 2\hat{\gamma}\omega_0 U \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} + \hat{\alpha}\omega_0^3 U^3 \left(\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}\right)^3 = 0. \quad (4.3)$$

Finalement en notant  $\hat{\gamma}/\omega_0 = \epsilon\gamma$  et  $\omega_0 U^2 \hat{\alpha} = \epsilon\alpha$  (avec donc  $\gamma \sim \mathcal{O}(1)$  et  $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ ), en omettant les  $\sim$  pour alléger les notations et en symbolisant les dérivées temporelles par des points, l'équation étudiée s'écrit finalement :

$$\ddot{u} - 2\epsilon\gamma\dot{u} + u + \epsilon\alpha\dot{u}^3 = 0. \quad (4.4)$$

### 4.1.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale

L'analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale de (4.4) est effectuée en Sect. 2.1.2 dans l'exemple 2.2 : la position d'équilibre triviale est stable (asymptotiquement) si  $\gamma < 0$  et instable si  $\gamma > 0$ .

### 4.1.3 Solution analytique approchée par la méthode des échelles multiples

#### 4.1.3.1 Solution à l'ordre 1

L'objectif de cette section est d'obtenir une solution approchée de (4.4) par la méthodes des échelles multiples (cf. Sect. 2.2.5). Dans le cadre de la recherche d'une solution à l'ordre 1, nous nous limiterons à deux échelles de temps : une rapide  $T_0 = t$  et une lente  $T_1 = \epsilon t$ . Dans ce cas on pose :

$$u(T_0, T_1) = u_0(T_0, T_1) + \epsilon u_1(T_0, T_1). \quad (4.5)$$

L'expression de  $u$  précédent et celles des dérivée temporelles (2.106) et (2.107) sont introduites dans l'Eq. (4.4). En équilibrant les termes en puissance de  $\epsilon$  on obtient :

$$\epsilon^0 : \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0 \quad (4.6a)$$

$$\epsilon^1 : \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + 2\lambda \frac{\partial u_0}{\partial T_0} - \alpha \left( \frac{\partial u_0}{\partial T_0} \right)^3 \quad (4.6b)$$

La solution de (4.6a) s'écrit de la façon suivante :

$$u_0(T_0, T_1) = A(T_1) e^{jT_0} + A^*(T_1) e^{-jT_0} \quad (4.7)$$

où  $A(T_1)$  est constante à l'échelle de temps rapide  $T_0$  mais variable à l'échelle de temps lente  $T_1$  et  $A^*(T_1)$  représente le complexe conjugué de  $A(T_1)$ .

Il faut ensuite résoudre (4.6b) en introduisant l'expression de  $u_0$  précédente de le membre de droite, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 &= -2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{jT_0} - \frac{\partial A^*}{\partial T_1} e^{-jT_0} \right) \\ &\quad + 2\lambda j \left( A e^{jT_0} - A^* e^{-jT_0} \right) + \alpha j \left( A e^{jT_0} - A^* e^{-jT_0} \right)^3 \\ &= -2j \left( \frac{\partial A}{\partial T_1} e^{jT_0} - \frac{\partial A^*}{\partial T_1} e^{-jT_0} \right) \\ &\quad + 2\lambda j \left( A e^{jT_0} - A^* e^{-jT_0} \right) \\ &\quad - \alpha j \left( 3A|A|^2 e^{jT_0} - 3A^*|A|^2 e^{-jT_0} - A^3 e^{3jT_0} + A^{*3} e^{-3jT_0} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'annulation des termes causant des termes séculaires dans (4.8) conduit à résoudre l'équation différentielle suivante pour l'amplitude complexe  $A$  :

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} - \lambda A + \frac{3}{2} \alpha A|A|^2 = 0. \quad (4.9)$$

Pour résoudre (4.9), on passe en coordonnées polaires

$$A = \frac{1}{2}ae^{j\varphi}, \quad (4.10)$$

ce qui, après calcul, donne

$$a = \frac{2\sqrt{2\lambda}e^{jT_1}}{\sqrt{3\alpha e^{2jT_1} - K}}, \quad (4.11)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad (4.12)$$

et donc

$$A = \frac{\sqrt{2\lambda}e^{jT_1}}{\sqrt{3\alpha e^{2jT_1} - K}}e^{j\varphi_0} \quad (4.13)$$

où  $K$  et  $\varphi_0$  sont des constantes.

*Démonstration.* L'introduction de (4.10) dans (4.9) donne :

$$\left( \frac{\partial a}{\partial T_1} + ja \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} \right) e^{j\varphi} - \lambda a e^{j\varphi} + \frac{3}{8} \alpha a^3 e^{j\varphi} = 0. \quad (4.14)$$

On sépare ensuite les parties réelle et imaginaires qui sont respectivement

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = 0 \quad (4.15)$$

dont la solution, si l'amplitude  $a$  est non nulle, est

$$\varphi = \text{Cste} = \varphi_0 \quad (4.16)$$

et

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = \lambda a - \frac{3}{8} \alpha a^3. \quad (4.17)$$

Après séparation des variables (4.17) s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial a}{\lambda a - \frac{3}{8} \alpha a^3} = \partial T_1 \quad (4.18)$$

qui se résout à l'aide de la décomposition en éléments simples de  $1/(\lambda a - \frac{3}{8} \alpha a^3)$ . Les racines de  $\lambda a - \frac{3}{8} \alpha a^3$  étant  $a = 0$ ,  $a = -\sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}}$  et  $a = \sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}}$  on obtient, après quelques étapes de calcul, la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{\lambda a - \frac{3}{8} \alpha a^3} = \frac{1}{a\lambda} - \frac{1}{2\lambda \left( \sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}} + a \right)} + \frac{1}{2\lambda \left( \sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}} - a \right)} \quad (4.19)$$

L'intégration de (4.17) donne donc :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(a)}{\lambda} - \frac{\ln\left(4\sqrt{6}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} - 6a\lambda\right)}{2\lambda} - \frac{\ln\left(6a\lambda + 4\sqrt{6}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)}{2\lambda} &= T_1 + \text{Cste} = T_1 - \ln\tilde{K} \\ \ln\left(\frac{a^2\tilde{K}}{\left(4\sqrt{6}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^2 - (6a\lambda)^2}\right) &= 2\lambda T_1 \\ \frac{a^2\tilde{K}}{\left(4\sqrt{6}\lambda\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\right)^2 - (6a\lambda)^2} &= e^{2\lambda T_1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La résolution de (4.22) donne :

$$\frac{4\sqrt{6}\lambda^{3/2}e^{\lambda T_1}}{\sqrt{\alpha(\tilde{K} + 36\lambda^2e^{2\lambda T_1})}} \quad (4.21)$$

qui en posant  $K = -12\lambda\tilde{K}$  revient à (4.11), ce qui conclue la démonstration. ■

Déterminons maintenant l'expression de  $u_1$  connaissant l'expression de  $A$ . Les termes causant les termes séculaires étant annulés, l'Éq. (4.8) se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} +^2 u_1 = \alpha j \left( A^3 e^{3jT_0} - A^{*3} e^{-3jT_0} \right) \quad (4.22)$$

avec  $A(T_1)$  donné par (4.13).

Pour rappel, on ne prend en compte pour l'instant que la solution particulière de (4.22) qui est obtenue à laide du principe de superposition (cf. Sect. A.1.3) :

$$u_1 = -j \frac{\alpha A^3}{8} e^{3jT_0} + j \frac{\alpha_3 A^{*3}}{8} e^{-3jT_0} = \frac{\alpha \lambda^{3/2} \epsilon e^{3\lambda T_1}}{\sqrt{2} (3\alpha e^{2\lambda T_1} - K)^{3/2}} \sin [3(T_0 + \varphi_0)]. \quad (4.23)$$

En repassant à l'échelle de temps physique  $t$  en écrivant  $T_0 = t$  et  $T_1 = \epsilon t$ , l'expression approchée de  $u$  à l'ordre 1 est donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0(t) + \epsilon u_1(t) \\ &= \frac{2\sqrt{2}\lambda e^{\lambda \epsilon t}}{\sqrt{3\alpha e^{2\lambda \epsilon t} - K}} \cos [t + \varphi_0] + \epsilon \frac{\alpha \lambda^{3/2} \epsilon e^{3\lambda \epsilon t}}{\sqrt{2} (3\alpha e^{2\lambda \epsilon t} - K)^{3/2}} \sin [3(t + \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour terminer, il fait déterminer la constantes  $K$  et  $\varphi_0$  à l'aide des conditions initiales (2.63) qui s'écrivent ici :

$$u(0) = \frac{2\sqrt{2}\lambda \cos(\varphi_0)}{\sqrt{3\alpha - K}} + \epsilon \frac{\alpha \lambda^{3/2} \sin(3\varphi_0)}{\sqrt{2}(3\alpha - K)^{3/2}} = s_0, \quad (4.25)$$

$$\dot{u}(0) = -\frac{2\sqrt{2}\lambda \sin(\varphi_0)}{\sqrt{3\alpha - K}} + \epsilon \frac{3\alpha \lambda^{3/2} \cos(3\varphi_0)}{\sqrt{2}(3\alpha - K)^{3/2}} = 0. \quad (4.26)$$

Les constantes  $K$  et  $\varphi_0$  sont également développées en séries entières de  $\epsilon$  :

$$K = K_0 + \epsilon K_1 \quad (4.27)$$

$$\varphi_0 = \varphi_{00} + \epsilon \varphi_{01} \quad (4.28)$$

Après un développement limité à l'ordre 1 de  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$  autour de  $\epsilon = 0$  et en équilibrant les termes en puissance de  $\epsilon$  on trouve :

$$\varphi_{00} = 0, \quad K_0 = \frac{3\alpha s_0^2 - 8\lambda}{s_0^2}, \quad \varphi_{01} = \frac{3\alpha s_0^2}{32} \quad \text{et} \quad K_1 = 0. \quad (4.29)$$

*Démonstration.* Le développement limité à l'ordre 1 de la vitesse initiale  $\dot{u}(0)$  et du déplacement initial  $u(0)$  autour de  $\epsilon = 0$  et l'équilibrages des termes en puissance de  $\epsilon$  donne respectivement à l'ordre 0 :

$$-\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\sin(\varphi_{00})}{\sqrt{3\alpha - K_0}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\cos(\varphi_{00})}{\sqrt{3\alpha - K_0}} = s_0 \quad (4.30)$$

dont on déduit que

$$\boxed{\varphi_{00} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{K_0 = \frac{3\alpha s_0^2 - 8\lambda}{s_0^2}}. \quad (4.31)$$

Ensuite à l'ordre 1, en prenant en compte également (4.31), cela donne pour le déplacement :

$$K_1 s_0 = 0 \quad (4.32)$$

et donc

$$\boxed{K_1 = 0}. \quad (4.33)$$

En prenant en compte également (4.31) pour la vitesse à l'ordre 1 on obtient :

$$\frac{3\alpha s_0^2 - 32\varphi_{01}}{32\sqrt{\frac{1}{s_0^2}}} = 0 \quad (4.34)$$

et donc finalement

$$\boxed{\varphi_{01} = \frac{3\alpha s_0^2}{32}} \quad (4.35)$$

et la démonstration est terminée. ■

#### 4.1.3.2 Solution intermédiaire

Pour simplifier les calculs il est possible d'obtenir une solution intermédiaire en se contentant de  $u_0$  mais avec une expression de  $A$  obtenue par l'annulation des termes de (4.8) créant des termes séculaires (cf. remarque Sect. 2.2.5), on obtient alors

$$u(t) = \frac{2\sqrt{2}\lambda e^{\lambda\epsilon t}}{\sqrt{3\alpha e^{2\lambda\epsilon t} - K}} \cos [t + \varphi_0]. \quad (4.36)$$

Dans ce cas les conditions initiales (2.63) s'écrivent :

$$u(0) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\cos(\varphi_0)}{\sqrt{3\alpha - K}} = s_0, \quad (4.37)$$

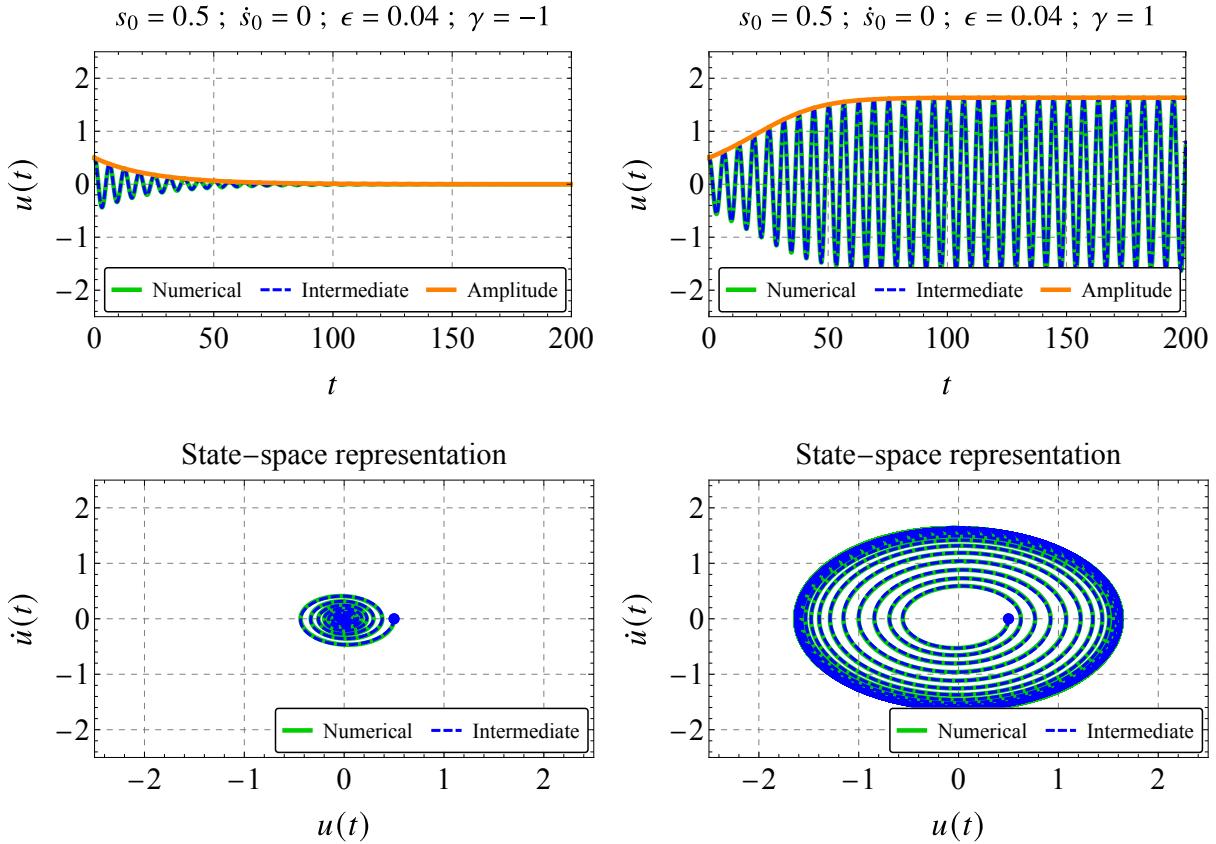
$$\dot{u}(0) = -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\sin(\varphi_0)}{\sqrt{3\alpha - K}} = 0 \quad (4.38)$$

ce qui conduit, avec les développements (4.27) et (4.28) à

$$\varphi_{00} = 0, \quad K_0 = \frac{3\alpha s_0^2 - 8\lambda}{s_0^2}, \quad \varphi_{01} = 0 \quad \text{et} \quad K_1 = 0. \quad (4.39)$$

et donc

$$\boxed{u(t) = \frac{2\sqrt{2}\lambda e^{\lambda\epsilon t}}{\sqrt{3\alpha e^{2\lambda\epsilon t} - \frac{3\alpha s_0^2 - 8\lambda}{s_0^2}}} \cos [t] = s(\epsilon t) \cos [t].} \quad (4.40)$$



**FIGURE 4.1.** Comparaison entre l'intégration numérique du (4.4) et la solution théorique intermédiaire donnée par (4.40) avec  $\gamma = -1$  à gauche,  $\gamma = 1$  à droite,  $\alpha = 1$  et  $\epsilon = 0.04$ . En haut : Série temporelle. En bas : représentation dans l'espace des phases.

où la fonction  $s(\epsilon t)$  représente l'amplitude (lentement variable) de  $u(t)$ . La démonstration des résultats précédents est équivalentes à celle permettant d'obtenir (4.29).

Le comparaison entre l'intégration numérique du (4.4) et la solution théorique intermédiaire donnée par (4.40) avec  $\gamma = -1$  à gauche,  $\gamma = 1$  à droite,  $\alpha = 1$  et  $\epsilon = 0.04$  est montrée en Fig. 4.1. Un très bon accord est observé.

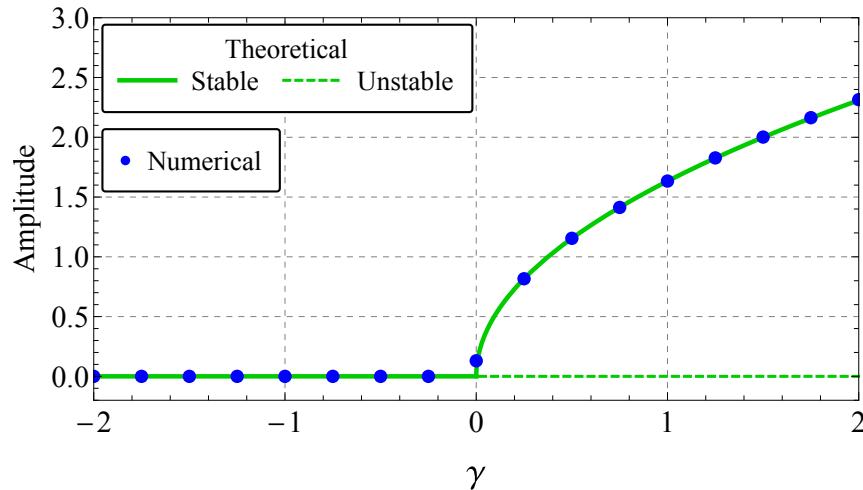
On observe également que le signal est composé de deux phases : une **phase transitoire** où l'amplitude augmente (resp. diminue) quand  $\gamma = 1$  (resp.  $\gamma = -1$ ) puis un **régime établi** où l'amplitude n'évolue plus. Le graphe qui représente l'amplitude du régime établi en fonction de  $\gamma$  (le paramètre de bifurcation du problème) est appelé **diagramme de bifurcation**. Il est calculer dans la section qui suit.

#### 4.1.3.3 Diagramme de bifurcation théorique

Le diagramme de bifurcation théorique est obtenue en calculant les positions d'équilibre, en amplitude et en phase de l'amplitude complexe  $A$ . On peut aussi indiquer dans le diagramme la stabilité de ces solutions, ce que nous allons faire ici. Dans notre cas la phase est constante (cf. Éq. (4.15)), le problème revient donc à trouver les positions d'équilibre en amplitude  $a$  dont l'évolution est régie par (4.17). Il faut donc résoudre

$$\lambda a - \frac{3}{8}\alpha a^3 = f(a) = 0 \quad (4.41)$$

dont les solutions sont  $a = 0$ ,  $a = -\sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}}$  et  $a = \sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}}$ . On retrouve donc la position d'équilibre triviale, notée  $a_1^e = 0$  et une seconde position d'équilibre strictement positive, notée  $a_2^e = \sqrt{\frac{8\lambda}{3\alpha}}$  (l'amplitude est en effet



**FIGURE 4.2.** Comparaison entre le diagramme de bifurcation théorique (en vert) et l'amplitude du régime établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (4.4) (points bleus).  $\alpha = 1$  et  $\epsilon = 0.04$ .

supposée positive). Par exemple si  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 1$  alors  $a_2^e = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1.63$  ce qui correspond à l'amplitude du régime établi observée en Fig. 4.1 (en haut à droite). À noter que  $a_2^e$  n'existe pas quand  $\lambda < 0$ .

Le système étant ici à 1 DDL (uniquement (4.17)), l'analyse de stabilité se réduit à déterminer le signe de  $f'(a_1^e)$  (resp.  $f'(a_2^e)$ ) : si  $f'(a_1^e) < 0$  (resp.  $f'(a_2^e) < 0$ ) alors  $a_1^e$  (resp.  $a_2^e$ ) est stable et si  $f'(a_1^e) > 0$  (resp.  $f'(a_2^e) > 0$ ) alors  $a_1^e$  (resp.  $a_2^e$ ) est instable. La dérivée de  $f$  par rapport à  $a$  s'écrit  $f'(a) = \lambda - \frac{9}{8}\alpha a^2$ , d'où  $f'(a_1^e) = \lambda$  et on retrouve les conclusions obtenues par l'analyse de stabilité de l'équilibre triviale effectué directement sur (4.4) (cf. Sect. 4.1.2). Pour la seconde position d'équilibre on a  $f'(a_1^e) = -2\lambda$  qui donc stable quand  $\lambda > 0$ . Quand  $a_1^e$  perd sa stabilité en  $\lambda = 0$  (le point de bifurcation)  $a_2^e$  est stable.

Les résultats précédents (calcul des positions d'équilibre de leur stabilité) sont résumés dans le diagramme de bifurcation présenté en Fig. 4.2. Le diagramme de bifurcation théorique (en vert) y est également comparé à l'amplitude du régime établi établi « mesurée » sur les signaux issus de l'intégration numérique de (4.4) (points bleus). Ces derniers sont obtenus en intégrant (4.4) (avec encore  $u(0) = 0.5$  et  $\dot{u}(0) = 0$  comme conditions initiales) sur une période  $T$ , le régime établi est supposé être déjà atteint à  $t = 0.9T$ . On prends le maximum de  $u$  (noté  $\max_u$ ) et le minimum de  $u$  (noté  $\min_u$ ) sur l'intervalle  $[0.9T, T]$  et l'amplitude est obtenue en effectuant la moyenne des deux. L'opération est répétée pour chaque valeurs de  $\gamma$  choisies (cf. abscisses des points bleus sur la Fig. 4.2). Un bon accord est encore une fois observé.

## 4.2 Instabilité aéroélastique d'une aile d'avion

Il s'agit ici d'étudier une instabilité de type **flottement flexion-torsion** à l'aide d'aide d'un modèle très simple d'aile d'avion.

### 4.2.1 Équations du modèle

On utilise un modèle simplifié (cf. Fig. 4.3) où l'aile est représentée par un profil indéformable qui peut se translater selon la verticale (mode de flexion) et tourner autour du point  $E$  (mode de torsion). L'aile est de longueur  $L$ , de masse  $M$  et de moment d'inertie  $I_G$  par rapport à  $G$ . Les coordonnées généralisées du problème sont la position  $y$  du point  $E$  et l'angle  $\alpha$  du profil par rapport à l'horizontale. La raideur de flexion (resp. torsion) est supposée posséder une partie linéaire  $K_y$  (resp.  $K_\alpha$ ) et une partie cubique ( $K_y^{NL}$ ) (resp.  $K_\alpha^{NL}$ ). L'amortissement linéaire est pris en compte par le biais des coefficients d'amortissement  $C_y$  et  $C_\alpha$  pour la flexion et la torsion respectivement. En présence d'un écoulement de fluide (ici c'est l'air) de vitesse

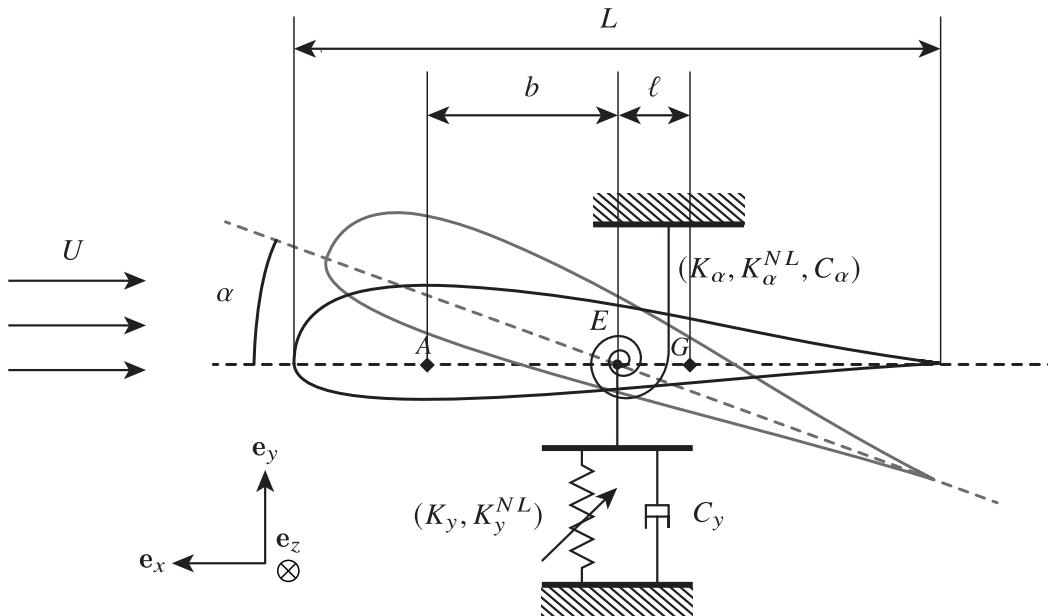


FIGURE 4.3. Modèle simplifié d'une aile d'avion.

$U$  une force de portance

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho U^2 L C_L(\alpha) \mathbf{e}_y = F \mathbf{e}_y \quad (4.42)$$

s'applique sur l'aile en  $A$  (le centre de poussée) où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. Le coefficient aérodynamique  $C_L(\alpha)$  est fonction de l'angle  $\alpha$  et en première approximation en considérant de petits angles il s'écrit :

$$C_L(\alpha) \approx C_L(0) + \alpha \left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}. \quad (4.43)$$

Dans l'hypothèse d'un écoulement quasi-statique on a [HP11] :  $C_L(0) = 0$  et  $\left( \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = 2\pi$ .

Les équations du mouvement peuvent être obtenues en appliquant les théorèmes généraux de la dynamique ou plus simplement avec les équations de Lagrange [HP11]. Cela conduit aux équations suivantes :

$$M\ddot{y} - M\ell\ddot{\alpha} + C_y\dot{y} + K_y y + K_y^{NL} y^3 = \pi\rho U^2 L \alpha \quad (4.44a)$$

$$I_E\ddot{\alpha} - M\ell\ddot{y} + C_\alpha\dot{\alpha} + K_\alpha\alpha + K_\alpha^{NL}\alpha^3 = \pi\rho U^2 b L \alpha \quad (4.44b)$$

avec  $I_E = I_G + M\ell^2$ .

*Démonstration. (Avec les théorèmes généraux de la dynamique).*

En négligeant son poids dans un soucis de simplicité [HP11], l'aile est soumise aux forces et moments suivants :

- La force de portance :  $\mathbf{F} = \pi\rho U^2 L \alpha \mathbf{e}_y = F \mathbf{e}_y$ , s'applique en  $A$ ;
- La force de rappel non linéaire du ressort vertical :  $\mathbf{F}_{\text{res}} = - (K_y y + K_y^{NL} y^3) \mathbf{e}_y$ , s'applique en  $E$ ;
- La force induite par l'amortisseur vertical :  $\mathbf{F}_{\text{visc}} = -C_y \dot{y} \mathbf{e}_y$ , s'applique en  $E$ ;
- Le moment de rappel du ressort de torsion non linéaire :  $\mathbf{M}_{\text{res}} = - (K_\alpha \alpha + K_\alpha^{NL} \alpha^3) \mathbf{e}_z$ ;
- Le moment induit par l'amortisseur de torsion :  $\mathbf{M}_{\text{visc}} = -C_\alpha \dot{\alpha} \mathbf{e}_z$

Il faut ensuite écrire le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) qui stipule qu'il existe au moins un repère galiléen  $R$  tel que pour tout système matériel  $\Sigma$  (ici l'aile), le torseur dynamique dans ce repère  $R$  en un point (ici  $E$ ) de l'espace

$$\{\mathcal{A}_{\Sigma/R}\}_E = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}\mathbf{a}_{G/R} \\ \boldsymbol{\delta}_{E/R} \end{Bmatrix}$$

avec  $\mathbf{M}\mathbf{a}_{G/R}$  et  $\boldsymbol{\delta}_{E/R}$  la résultante dynamique et le moment dynamique respectivement, est égal à chaque instant au torseur en  $E$ ,

$$\{\mathcal{F}_{ext/R}\} = \begin{Bmatrix} \sum \mathbf{F}_{ext} \\ \sum \mathbf{M}_{ext} \end{Bmatrix},$$

des efforts extérieurs appliqués à  $\Sigma$  :

$$\{\mathcal{A}_{\Sigma/R}\} = \{\mathcal{F}_{ext/R}\}.$$

**Calcul de la résultante dynamique.** Le vecteur position du point  $G$  est :

$$\mathbf{OG} = -\ell \cos(\alpha) \mathbf{e}_x + (y - \ell \sin(\alpha)) \mathbf{e}_y \approx -\ell \mathbf{e}_x + (y - \ell \alpha) \mathbf{e}_y$$

en considérant  $0 < \alpha \ll 1$ . Par conséquent on a

$$\mathbf{a}_G = (\ddot{y} - \ell \ddot{\alpha}) \mathbf{e}_y.$$

La première équation du PFD projetée sur l'axe  $(O, \mathbf{e}_y)$ , c.-à-d.  $\mathbf{M}\mathbf{a}_{G/R} \cdot \mathbf{e}_y = \sum \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{e}_y$ , s'écrit :

$$M\ddot{y} - M\ell\ddot{\alpha} + C_y\dot{y} + K_y y + K_y^{NL} y^3 = \pi\rho U^2 L \alpha.$$

**Calcul du moment dynamique.** Pour le calcul de  $\boldsymbol{\delta}_{E/R}$  on utilise la formule suivante :

$$\boldsymbol{\delta}_{E/R} = \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{I}_E \boldsymbol{\Omega}_E + \mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{G} \wedge \mathbf{v}_{E/R})}_{\boldsymbol{\sigma}_E} + \mathbf{M}\mathbf{v}_{E/R} \wedge \mathbf{v}_{G/R}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_E$  est le moment cinétique par rapport à  $E$ ,  $\mathbf{I}_E$  est la matrice d'inertie au point  $E$ ,  $\boldsymbol{\Omega}_E = \dot{\alpha} \mathbf{e}_z$  est le vecteur rotation,  $\mathbf{v}_{E/R}$  et  $\mathbf{v}_{G/R}$  sont les vitesses des points  $E$  et  $G$  respectivement. En utilisant le théorème de Huygens généralisé, la matrice d'inertie en  $E$  s'écrit à partie de celle en  $G$  comme suit :

$$\mathbf{I}_E = \mathbf{I}_G + M \begin{pmatrix} \ell^2 \alpha^2 & \ell^2 \alpha & 0 \\ \ell^2 \alpha & \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell^2 + \ell^2 \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\ell^2 \alpha^2 & M\ell^2 \alpha & 0 \\ M\ell^2 \alpha & M\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_G + M\ell^2 + M\ell^2 \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Le terme en bas à droite de la matrice correspond au moment d'inertie de l'aile par rapport à  $E$  et s'écrit  $I_E = I_G + M\ell^2$  en négligeant les termes non linéaires car  $0 < \alpha \ll 1$  ce qui donne  $\mathbf{I}_E \boldsymbol{\Omega}_E = I_E \dot{\alpha} \mathbf{e}_z$ .

Finalement en notant que :

$$\mathbf{M}(\mathbf{F}) = bF \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{M}\mathbf{E}\mathbf{G} \wedge \mathbf{v}_{E/R} = -M\ell \dot{y} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{M}\mathbf{v}_{E/R} \wedge \mathbf{v}_{G/R} = \mathbf{0},$$

la deuxième équation du PFD projetée sur l'axe  $(O, \mathbf{e}_z)$ , c.-à-d.  $\boldsymbol{\delta}_{E/R} \cdot \mathbf{e}_z = \sum \mathbf{M}_{ext} \cdot \mathbf{e}_z$  s'écrit :

$$I_E \ddot{\alpha} - M\ell \ddot{y} + C_\alpha \dot{\alpha} + K_\alpha \alpha + K_\alpha^{NL} \alpha^3 = \pi\rho U^2 b L \alpha$$

et la démonstration est terminée. ■

*Démonstration.* (Avec les équations de Lagrange). Les équations de Lagrange d'écrivent de façon générale sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{Q}_i \quad i = 1, \dots, N \quad (4.45)$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$  est le Lagrangien du système (où  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$  sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle),  $\mathcal{D}$  est la fonction de dissipation et  $\mathcal{Q}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont les forces généralisées dues aux forces non conservatives autres que les forces d'amortissement.  $N$  est le nombre de coordonnées généralisées du système, ici nous en avons deux :  $y$  et  $\alpha$ .

L'énergie cinétique est déterminée par application du théorème de König, on trouve :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{v}_G + \frac{1}{2} I_G^2 \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} M (\dot{y} - \ell \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} I_G^2 \dot{\alpha}^2. \quad (4.46)$$

La prise en compte des termes de raideurs cubiques conduit à l'expression suivante de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} K_y y^2 + \frac{1}{2} K_\alpha \alpha^2 + \frac{1}{4} K_y^{NL} y^4 + \frac{1}{4} K_\alpha^{NL} \alpha^4. \quad (4.47)$$

La fonction de dissipation est :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} C_y \dot{y}^2 + \frac{1}{2} C_\alpha \dot{\alpha}^2 \quad (4.48)$$

On montre que les forces généralisées  $\mathcal{Q}_y$  et  $\mathcal{Q}_\alpha$  due à la force de portance  $\mathbf{F}$  sont :

$$\mathcal{Q}_y = \pi \rho U^2 L \alpha \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_\alpha = \pi \rho U^2 b L \alpha \quad (4.49)$$

Finalement l'application des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{y}} = \mathcal{Q}_y, \quad (4.50a)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\alpha}} = \mathcal{Q}_\alpha \quad (4.50b)$$

conduit à (4.44) et la démonstration est terminée. ■

Afin d'adimensionner les équations les équations précédentes on pose  $x = y/L$  et on aboutit à

$$\ddot{x} - x_\alpha \ddot{\alpha} + \zeta_x \dot{x} + \Omega^2 x - \beta \Theta^2 \alpha + \xi_x x^3 = 0 \quad (4.51a)$$

$$r_\alpha^2 \ddot{\alpha} - x_\alpha \ddot{y} + \zeta_\alpha \dot{\alpha} + r_\alpha^2 \alpha - \nu \Theta^2 \alpha + \xi_\alpha \alpha^3 = 0 \quad (4.51b)$$

avec  $x_\alpha = \ell/L$ ,  $r_\alpha = \sqrt{I/(L^2 M)}$ ,  $\Omega = \omega_y/\omega_\alpha$  (avec  $\omega_y = \sqrt{K_y/M}$  et  $\omega_\alpha = \sqrt{K_\alpha/I}$ ),  $\zeta_x = C_z/(M \omega_\alpha)$ ,  $\zeta_\alpha = C_\alpha/(M L^2 \omega_\alpha)$ ,  $\xi_x = K_y^{NL} L^2 / (m \omega_\alpha^2)$ ,  $\xi_\alpha = K_\alpha^{NL} / (M L^2 \omega_\alpha^2)$ ,  $\beta = \pi \rho L^2 / M$ ,  $\nu = \pi \rho b / M$  et  $\Theta = U / (L \omega_\alpha)$ .

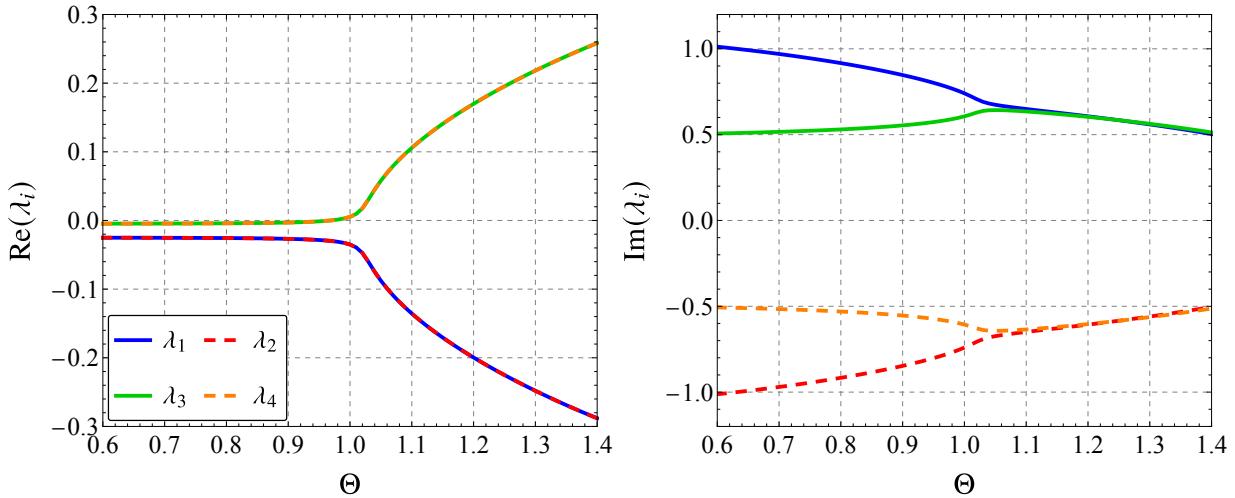
Le temps a également été adimensionné en posant  $\tilde{t} = \omega_\alpha t$  et en gardant le  $\{\}$  comme notation pour la dérivée par rapport à  $\tilde{t}$  (dans le suite pour simplifié les notations le  $\{\}$  sera omis).

#### 4.2.2 Analyse de stabilité de la position d'équilibre triviale

L'étude de stabilité de la position d'équilibre triviale de (4.51) est effectuée ici est suivant la méthode présentée en Sect. 2.1.

Tour d'abord, l'Eq. (4.51) est écrite sous forme matricielle

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u} = (x, \alpha)^T, \quad (4.52)$$



**FIGURE 4.4.** Parties réelles (à gauche) et parties imaginaires (à droite) des valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) de  $\mathbf{A}$  en fonction de la vitesse adimensionnée de l'écoulement  $\Theta$ . Les paramètres utilisées sont :  $x_\alpha = 0.2$ ,  $r_\alpha = 0.5$ ,  $\Omega = 0.5$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\nu = 0.08$ ,  $\zeta_x = 0.01$ ,  $\zeta_\alpha = 0.01$ ,  $\xi_h = 0.1$  et  $\xi_\alpha = 0.1$ .

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -x_\alpha \\ -x_\alpha & r_\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \zeta_x & 0 \\ 0 & \zeta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Omega^2 & -\beta\Theta^2 \\ 0 & r_\alpha^2 - \nu\Theta^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\text{NL}} = \begin{pmatrix} \xi_x x^3 \\ \xi_\alpha \alpha^3 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Le système est ensuite écrit dans l'espace des phases (cf. Éq. (2.22)) comme suit :

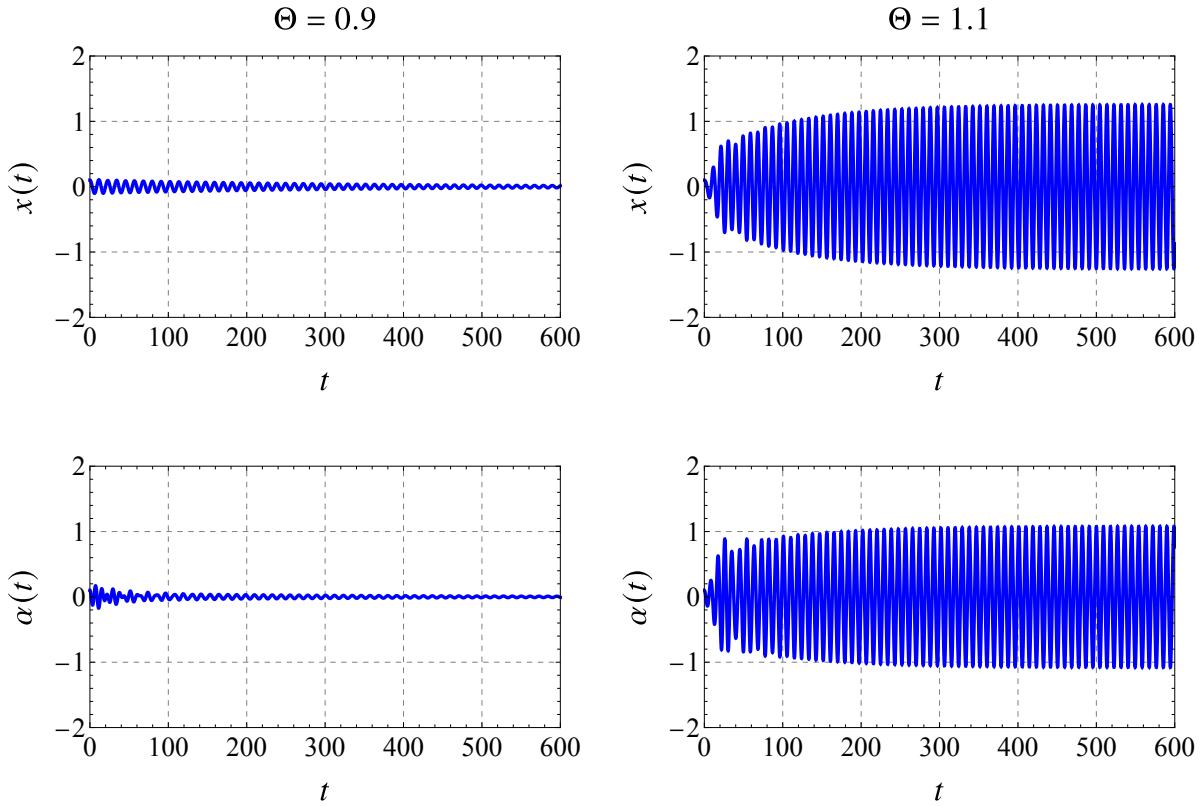
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

avec  $\mathbf{x} = (x, \alpha, \dot{x}, \dot{\alpha})$  et  $\mathbf{A}$  donnée par (2.23) à partir des expressions des matrices données par (4.53). Le valeurs propres  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont calculées en résolvant  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ . Cela donne une équation polynomiale d'ordre 4 qui est résolue numériquement (en utilisant Matlab ou Mathematica ou ...) en fonction de la vitesse adimensionnée de l'écoulement  $\Theta$ . Le résultat est tracée en Fig. 4.4. On observe que les 4 valeurs propres sont constituées de 2 paires de complexes conjuguées (il y a deux modes d'oscillations) et qu'une bifurcation de Hopf (cf. Sect. 2.1.3) se produit pour  $\Theta_{\text{Hopf}} \approx 0.96$ . On observe en effet que la partie réelle d'une des deux paires de valeurs propres (ici c'est  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$ ) devient positive pour cette valeur de  $\Theta$  (on dit que  $\lambda_3$  et  $\lambda_4$  sont les valeurs propres du **mode instable**). Selon le Théorème 2.1, la position d'équilibre triviale est stable pour  $\Theta < \Theta_{\text{Hopf}}$  et instable pour  $\Theta > \Theta_{\text{Hopf}}$ . Cette instabilité est parfois également appelée instabilité par **coalescence (ou couplage) de modes** car on observe sur la Fig. 4.4 à droite que les parties imaginaires des valeurs propres (qui correspondent aux pulsations des deux modes) se rejoignent lorsque  $\Theta > \Theta_{\text{Hopf}}$ .

### 4.2.3 Étude des cycles limites par la méthode de moyennage

#### 4.2.3.1 Calcul de l'amplitude des cycles limites

Dans la section précédente nous avons vu que la position d'équilibre triviale est stable pour  $\Theta < \Theta_{\text{Hopf}}$  et instable pour  $\Theta > \Theta_{\text{Hopf}}$ . La Fig. 4.5 montre le résultat de l'intégration numérique de (4.51) pour  $\Theta = 0.9$  (à droite) et  $\Theta = 1.1$  (à gauche). On observe effectivement une décroissance vers 0 quand  $\Theta < \Theta_{\text{Hopf}} \approx 0.97$  et l'apparition d'un cycle limite quand  $\Theta > \Theta_{\text{Hopf}}$ . L'amplitude des cycles limites va être déterminée théoriquement par la méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov (cf. Sect. 2.2.6). Les calculs à la main deviennent laborieux dès que l'on traite de systèmes ayant plus d'un DDL, le bibliothèque de calcul formal Sympy du langage Python a donc été utilisé (des morceaux du programmes sont reportés en Annexe. B).



**FIGURE 4.5.** Résultat de l'intégration numérique de (4.51) pour  $\Theta = 0.9$  (à droite) et  $\Theta = 1.1$  (à gauche). Les autres paramètres sont les mêmes que pour la Fig. 4.4.

Dans ce but l'équation matricielle (4.52) est réécrite sous la forme suivante :

$$\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{Z}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{u} + \mathbf{G}_{\text{NL}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad (4.55)$$

avec  $\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$  et  $\mathbf{G}_{\text{NL}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{\text{NL}}$  que l'on écrit formellement sous la forme suivante :

$$\mathbf{Z} = \epsilon \begin{pmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega^2 + \epsilon\sigma_1 & \epsilon\omega_{12} \\ \epsilon\omega_{21} & \omega^2 + \epsilon\sigma_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G}_{\text{NL}} = \epsilon \begin{pmatrix} g_{11}x^3 + g_{12}\alpha^3 \\ g_{21}x^3 + g_{22}\alpha^3 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

pour symboliser le fait que le système s'écrit sous la forme du système linéaire, conservatif et découplé où  $x$  et  $\alpha$  oscillent à la même pulsation  $\omega$  plus une perturbation d'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon)$ .

**Remarque.** On fait cette hypothèse car nous étudions une instabilité par couplage de modes et donc les variables oscillent à des pulsations très proches, on prend ici

$$\omega = \text{Im}(\lambda_3) \quad (4.57)$$

où  $\lambda_3$  est la valeur propre correspondant au mode instable de (4.55) dont la partie imaginaire est positive.

De plus l'hypothèse d'un système linéaire, non amorti et découplé perturbé par des éléments d'ordre  $\mathcal{O}(\epsilon)$  n'est pas vérifiée rigoureusement mais est effectuée pour que la méthode de moyennage puisse être menée à bien. Il faut donc faire attention au résultat obtenu.

Conformément à la méthode de moyennage de Bogoliubov–Krylov, les changements de variables suivant sont effectués :

$$x(t) = a_1(t) \cos(\omega t + \varphi_1(t)) = a_1(t) \cos \phi_1(t) \quad (4.58)$$

$$v_x(t) = -a_1(t)\omega \sin(\omega t + \varphi_1(t)) = -a_1(t)\omega \sin \phi_1(t) \quad (4.59)$$

et

$$\alpha(t) = a_2(t) \cos(\omega t + \varphi_2(t)) = a_2(t) \cos \phi_2(t) \quad (4.60)$$

$$v_\alpha(t) = -a_2(t)\omega \sin(\omega t + \varphi_2(t)) = -a_2(t)\omega \sin \phi_2(t) \quad (4.61)$$

Les formes de vitesses souhaitées  $v_y$  et  $v_\alpha$  imposent que :

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{a}_1 \cos \phi_1}{a_1 \sin \phi_1}, \quad \dot{a}_1 = a_1 \dot{\varphi}_1 \frac{\sin \phi_1}{\cos \phi_1}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{a}_2 \cos \phi_2}{a_2 \sin \phi_2}, \quad \text{et} \quad \dot{a}_2 = a_2 \dot{\varphi}_2 \frac{\sin \phi_2}{\cos \phi_2}. \quad (4.62)$$

On dérive « vraiment »  $v_y(t)$  et  $v_\alpha(t)$  par rapport au temps, ce qui donne :

$$\dot{v}_x = \ddot{x} = -a_1 \omega^2 \cos \phi_1 - \dot{a}_1 \omega \sin \phi_1 - a_1 \dot{\varphi}_1 \omega \cos \phi_1, \quad (4.63)$$

$$\dot{v}_\alpha = \ddot{\alpha} = -a_2 \omega^2 \cos \phi_2 - \dot{a}_2 \omega \sin \phi_2 - a_2 \dot{\varphi}_2 \omega \cos \phi_2. \quad (4.64)$$

On utilise les Éqs. (4.62), (4.63) et (4.64) pour écrire les équations du mouvement (4.55) sous la forme suivante :

$$\dot{a}_1 = \epsilon f_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) \quad (4.65a)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \epsilon f_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) \quad (4.65b)$$

$$\dot{a}_2 = \epsilon f_3(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) \quad (4.65c)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \epsilon f_4(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) \quad (4.65d)$$

Les fonctions  $f_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont calculées et affichées en Annexe B, (cf. Éqs. (B.1), (B.3), (B.5) et (B.7)).

Comme  $0 < \epsilon \ll 1$  donc  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  sont lentement variables donc évoluent peu pendant une période  $T_0 = 2\pi/\omega$ . **L'approximation de Bogoliubov–Krylov** est donc utilisée pour moyennner les fonctions  $f$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sur une période  $T_0$  en considérant que  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$  sont constants. On a donc :

$$\dot{a}_1 = \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) dt = \hat{f}_1(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.66a)$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) dt = \hat{f}_2(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.66b)$$

$$\dot{a}_2 = \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_3(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) dt = \hat{f}_3(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.66c)$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\epsilon}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} f_4(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2, \omega t) dt = \hat{f}_4(a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2) \quad (4.66d)$$

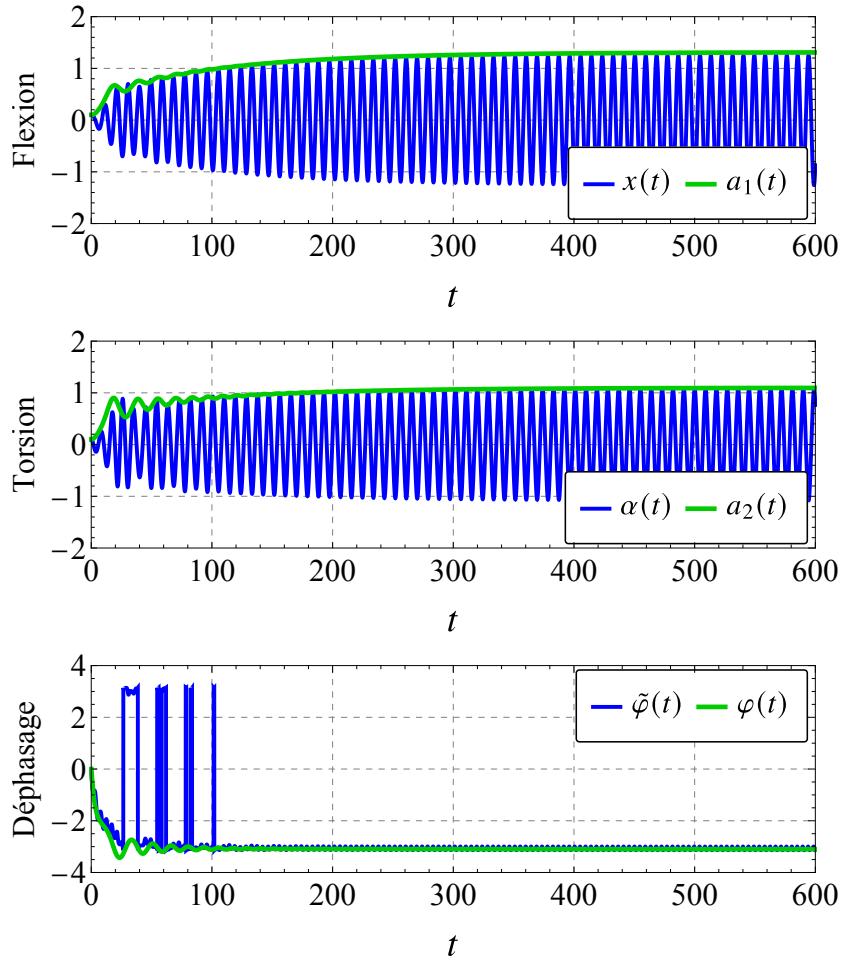
Les fonctions  $\hat{f}_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) sont calculées et affichées en Annexe B (cf. Éqs. (B.2), (B.4), (B.6) et (B.8)). On observe dans ces équations moyennées que le système ne dépend pas de  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  indépendamment mais uniquement de la différence  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . On a donc finalement un système à 3 DDL :

$$\dot{a}_1 = \epsilon h_1(a_1, a_2, \varphi) \quad (4.67a)$$

$$\dot{a}_2 = \epsilon h_2(a_1, a_2, \varphi) \quad (4.67b)$$

$$\dot{\varphi} = \epsilon h_3(a_1, a_2, \varphi) \quad (4.67c)$$

avec  $h_1 = \hat{f}_1$ ,  $h_2 = \hat{f}_3$  et  $h_3 = \hat{f}_2 - \hat{f}_4$  ( $h_3$  est donnée par (B.9)).



**FIGURE 4.6.** Comparaison des séries temporelles issues de l'intégration numérique de (4.51) (en bleu) et (4.67) (en vert) pour  $\Theta = 1.1$ . Les autres paramètres sont les mêmes que ceux de la Fig. 4.4.

La comparaison des séries temporelles issues de l'intégration numérique de (4.51) et (4.67) pour  $\Theta = 1.2$  est montrée en Fig. 4.6. Le déphasage  $\tilde{\varphi}$  est obtenue à partie des séries temporelles  $x(t)$  et  $\alpha(t)$  séries temporelles issues de l'intégration numérique de (4.51) par la formule :

$$\tilde{\varphi} = \arg \left( \frac{x - j\dot{x}/\omega}{\alpha - j\dot{\alpha}/\omega} \right). \quad (4.68)$$

On observe d'abord que le système (4.67) représente effectivement l'amplitude et le déphasage des oscillations de (4.51). Nous remarquons ensuite qu'un cycle limite pour (4.51) correspond à un point fixe (i.e. une position d'équilibre) pour (4.67). Pour déterminer les cycles limites de (4.51) il faut donc déterminer les points fixes  $(a_1^e, a_2^e, \varphi^e)$  de (4.67) en résolvant :

$$h_1(a_1^e, a_2^e, \varphi^e) = 0 \quad (4.69a)$$

$$h_2(a_1^e, a_2^e, \varphi^e) = 0 \quad (4.69b)$$

$$h_3(a_1^e, a_2^e, \varphi^e) = 0 \quad (4.69c)$$

ce qui est effectué numériquement. Les résultats sont montrées à la fin de la section suivante, quand la stabilité des points fixes aura aussi été déterminée.

#### 4.2.3.2 Analyses de stabilité des cycles limites

L'analyse de stabilité d'un régime périodique, que l'on devrait menée si nous n'utilisions pas la méthode de moyennage, n'est pas abordée dans ce cours<sup>1</sup>. Ici, grâce à la méthode de moyennage (qui nécessite d'avoir faites quelques hypothèses pour être mise en œuvre), l'analyse de stabilité des cycles limites revient à une analyse de stabilité de points fixes, ce que nous savons faire (cf Sect. 2.1).

On écrit l'Eq. (4.67) sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{q}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{q} = (a_1, a_2, \varphi)^T \quad (4.70)$$

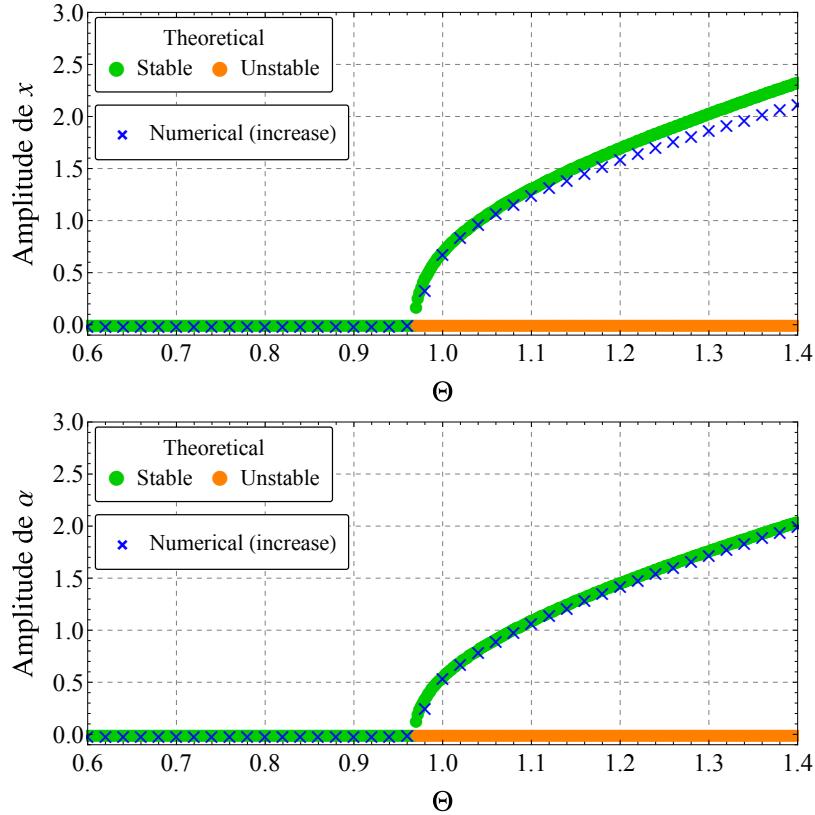
Les valeurs propres  $\lambda_j (j = 1, \dots, 3)$  de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}_h(\mathbf{q})$  de la fonction vectorielle  $\mathbf{h}$  évaluée en  $\mathbf{q}^e = (a_1^e, a_2^e, \varphi^e)^T$ , i.e.  $\mathbf{J}_h(\mathbf{q}^e)$ , sont ensuite calculées. Il faut enfin appliquer le Théorème 2.1 pour déterminer la stabilité des positions d'équilibre  $\mathbf{q}^e$ . Tout ceci est également effectué numériquement.

Le diagramme de bifurcation théorique résultant de l'analyse précédente (stabilité de la position d'équilibre triviale, calcul des positions d'équilibre de (4.67) et de leur stabilité) est représenté, pour le même jeu de paramètre que celui utilisé précédemment, en Fig. 4.7. Le diagramme de bifurcation construit à partir l'intégration numérique de (4.51) est également représenté. Ici ce dernier est obtenu en intégrant numériquement (4.51) sur une période  $T$ , le régime établi est supposé être déjà atteint à  $t = 0.8T$ . On prends les maximums et les minimums de  $x$  et  $\alpha$  sur l'intervalle  $[0.8T, T]$  et l'amplitude de chacune des deux variables est obtenue en effectuant la moyenne de ces maximums et du minimums. Partant d'une simulation initiale éloignée de la bifurcation ( $\Theta = 0.6$ ) avec des conditions initiales  $y_0, \dot{y}_0, \alpha_0$  et  $\dot{\alpha}_0$  proches de zéro, on prend ensuite la valeur suivante de  $\Theta$  (en augmentant) et on effectue une nouvelle simulation en prenant comme conditions initiales les valeurs  $y(T), \dot{y}(T), \alpha(T)$  et  $\dot{\alpha}(T)$  de la simulation précédente.

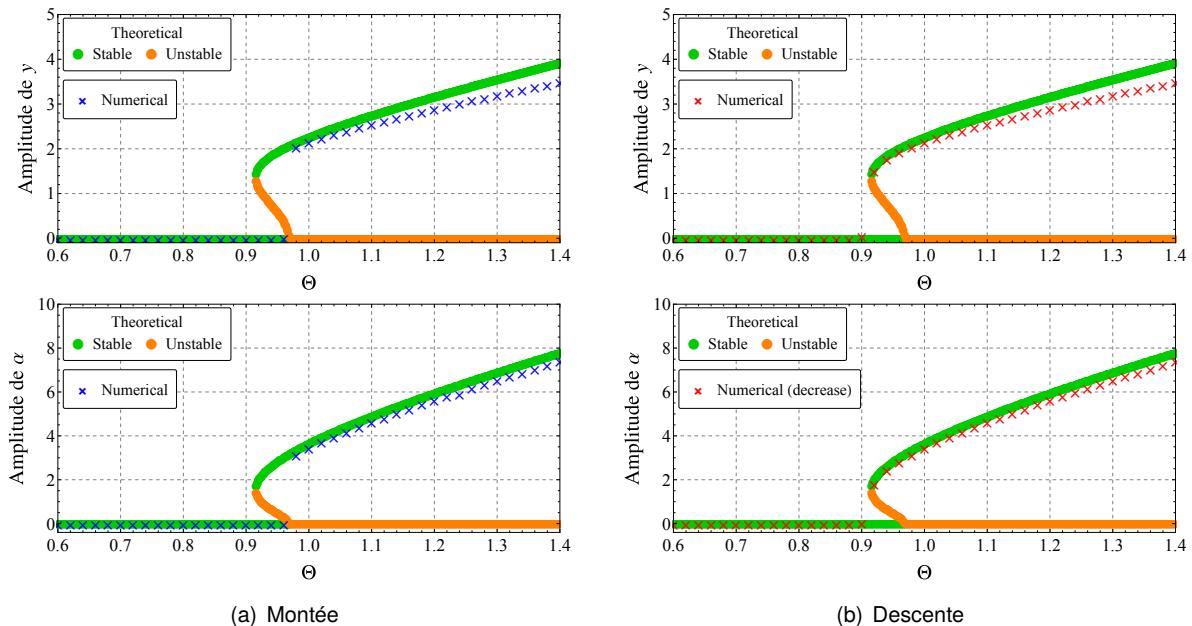
Le diagramme obtenu est typique de celui d'un système rencontrant un bifurcation de Hopf super-critique (ou **directe**) car il y a continuité, au niveau du point de bifurcation, entre la branche du diagramme correspondant au point fixe trivial stable et la branche correspondant à cycle limite stable.

Un autre diagramme (cf. Fig 4.8), obtenu en diminuant la valeur de  $\xi_\alpha$  (égal maintenant à 0.01), montre le cas d'une bifurcation **sous-critique** (ou **inverse**) où la continuité, au niveau du point de bifurcation, entre la branche du diagramme correspondant au point fixe trivial stable et la branche correspondant à cycle limite stable est perdue. Ceci donne lieu à un **phénomène d'hystéresis** mis en évidence en comparant le diagramme de bifurcation numérique obtenu en augmentant  $\Theta$  (cf. Fig 4.8(a)) à celui obtenu en diminuant  $\Theta$  (cf. Fig 4.8(b)). Lorsque l'on augmente  $\Theta$ , on suit la branche du point fixe trivial jusqu'au point de bifurcation puis on saute sur la branche correspondant au cycle limite stable. Lorsque l'on diminue  $\Theta$ , on suit la branche correspondant au cycle limite stable jusqu'au point de rebroussement puis on saute sur la branche du point fixe trivial qui est donc atteint pour une valeur de  $\Theta$  inférieure à point de bifurcation. Ce phénomène peut être extrêmement dangereux, notamment en montée, car au niveau de la bifurcation une variation infime de  $\Theta$  peut engendrer une augmentation importante de l'amplitude des oscillations, ce qui n'est pas le cas pour la bifurcation directe grâce à la continuité des branches de point fixes stable.

1. Il faut utiliser la théorie de Floquet mais cela nécessite au préalable d'avoir déterminer les cycles limites ce qui peut se faire par la méthode de l'équilibrage harmonique par exemple. Ces deux méthodes ont l'avantages de ne pas faire l'hypothèse d'un système faiblement perturbé mais sont plus compliquée à mettre en œuvre aussi bien d'un point de vue théorique que numérique.



**FIGURE 4.7.** Diagramme de bifurcation théorique (positions d'équilibre stables en vert et instables en orange) et numérique obtenu en augmentant  $\Theta$  (croix bleus). Les paramètres sont les mêmes que ceux de la Fig. 4.4.



**FIGURE 4.8.** Diagrammes de bifurcation théoriques (positions d'équilibre stables en vert et instables en orange) et numériques obtenus en (a) augmentant  $\Theta$  (croix bleus) et (b) diminuant  $\Theta$  (croix rouges). Les paramètres sont les mêmes que ceux de la Fig. 4.4 sauf pour  $\xi_\alpha$  qui vaut 0.01.

---

---

**TROISIÈME PARTIE**

---

**Annexes**



# Rappels sur les oscillateurs linéaires

## Sommaire

<b>A.1 Système à un degré de liberté</b> . . . . .	<b>81</b>
A.1.1 Réponse libre . . . . .	81
A.1.1.1 Système conservatif . . . . .	81
A.1.1.2 Système non conservatif . . . . .	83
A.1.2 Réponse forcée harmonique . . . . .	85
A.1.3 Principe de superposition . . . . .	88
<b>A.2 Système à plusieurs degrés de liberté</b> . . . . .	<b>89</b>
A.2.1 Modes de vibrations . . . . .	89
A.2.2 Principe de la décomposition modale . . . . .	91
A.2.3 Cas d'un système conservatif . . . . .	91
A.2.4 Cas d'un système dissipatif . . . . .	92

## A.1 Système à un degré de liberté

### A.1.1 Réponse libre

#### A.1.1.1 Système conservatif

On considère le mouvement d'une masse  $m$  connectée à un ressort de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité est fixée à un *support rigide sans mouvement* (cf. Fig. A.1).

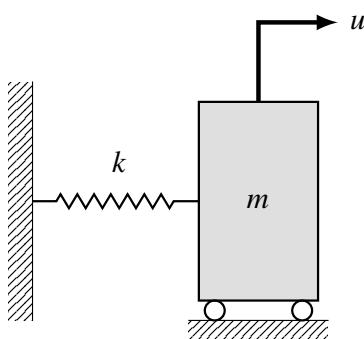
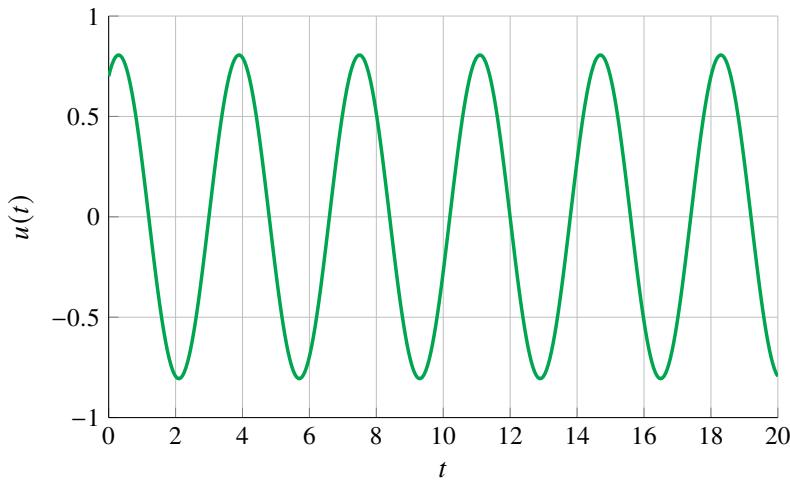


FIGURE A.1. Système masse-ressort.



**FIGURE A.2.** Vibrations libres d'un oscillateur harmonique (A.3) avec conditions initiales  $u(0) = s_0$  et  $\dot{u}(t) = \dot{s}_0$ .

En appliquant le *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD) l'**équation du mouvement** de la masse  $m$  est obtenue :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (\text{A.1})$$

en considérant que la force de rappel du ressort est proportionnel à son allongement (i.e. cas linéaire, valable pour des mouvements de faible amplitude). La variable  $u$  représente le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique.

En introduisant la **pulsation propre**  $\omega_0$  de (A.1) telle que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (\text{A.2})$$

nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (\text{A.3})$$

qui est celle d'un **oscillateur harmonique**.

La solution générale de l'équation du mouvement (A.3) est

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad (\text{A.4})$$

La **fréquence propre** et la **période propre** s'expriment par

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (\text{A.5})$$

Le déplacement  $u$  de la masse s'obtient à partir de l'équation (A.4), en déterminant les inconnues  $A$  et  $B$ . Celles-ci sont déterminées à partir des **conditions initiales** :

$$u(0) = s_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = \dot{s}_0. \quad (\text{A.6})$$

Il en résulte l'expression suivante pour le déplacement de la masse :

$$u(t) = s_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (\text{A.7})$$

Un illustration de la solution (A.7) est représentée à la Fig. A.2 en considérant les conditions initiales (A.6). Le mouvement observé est donc celui d'une oscillation harmonique de période  $T_0$  et d'amplitude  $|u|$  constante dans le temps, exprimée par :

$$|u| = \sqrt{u_s^2 + \left(\frac{\dot{s}_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (\text{A.8})$$

*Démonstration.* De (A.4) on obtient :

$$u = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{u} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t) \quad (\text{A.10})$$

A partir des conditions initiales :  $u(0) = s_0$  et  $\dot{u}(0) = \dot{s}_0$  on tire :

$$A = u_0 \quad \text{et} \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}. \quad (\text{A.11})$$

d'où finalement :

$$u(t) = s_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{s}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (\text{A.12})$$

Pour calculer l'amplitude  $|u| = D$  de la solution on pose :

$$u(t) = D \cos(\omega_0 t + \varphi) = D (\cos(\omega_0 t) \cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t) \sin(\varphi)) \quad (\text{A.13})$$

Par identification on a  $A = D \cos(\varphi)$  et  $B = -D \sin(\varphi)$  et donc :

$$D = |u| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et aussi} \quad \tan \varphi = -\frac{B}{A} \quad (\text{A.14})$$

■

### A.1.1.2 Système non conservatif

On considère maintenant système masse-ressort avec amortisseur visqueux est illustré en Fig. A.3. Pour ce type d'amortissement, la force  $F_c$  induite sur la masse est telle qu'elle s'oppose à sa vitesse, c'est-à-dire :

$$F_c = -c\dot{u}, \quad (\text{A.15})$$

où  $c$  représente la **constante d'amortissement**. L'équation du mouvement de la masse  $m$  s'écrit alors :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (\text{A.16})$$

où  $u$  représente toujours le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique.

En introduisant le **taux d'amortissement**  $\zeta$  tel que

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad (\text{A.17})$$

l'Éq. (A.16) s'écrit

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (\text{A.18})$$

avec  $\zeta$  est appelé **taux d'amortissement**.

Il apparaît alors que la solution générale de l'équation du mouvement (A.18) revêt plusieurs formes selon que  $\zeta < 1$ ,  $\zeta = 1$  ou  $\zeta > 1$  :

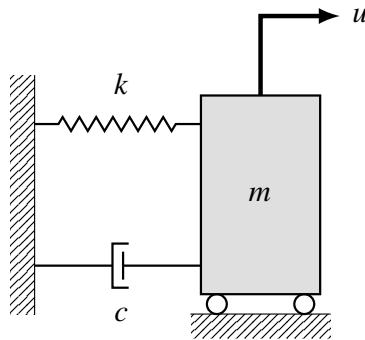


FIGURE A.3. Système masse-ressort avec amortisseur visqueux.

- **Mouvement sous-amorti**,  $\zeta < 1$  :

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)], \quad (\text{A.19})$$

ou

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} [A' e^{j \omega_d t} + B' e^{-j \omega_d t}], \quad (\text{A.20})$$

où  $\omega_d$  représente la pulsation propre apparente du système (cf. Eq. (A.24)). Dans ce cas, le mouvement est périodique et l'amplitude des oscillations suit une décroissance exponentielle.

- **Mouvement critique**,  $\zeta = 1$  :

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} [A + Bt]. \quad (\text{A.21})$$

Dans ce cas, le mouvement est apériodique : il n'y a pas de vibrations.

- **Mouvement sur-amorti**,  $\zeta > 1$  :

$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} [A e^{-(\sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_0 t} + B e^{(\sqrt{\zeta^2 - 1}) \omega_0 t}]. \quad (\text{A.22})$$

Dans ce cas, le mouvement est apériodique : il n'y a pas de vibrations.

Seul le cas oscillant ( $\zeta < 1$ ) est considéré ici. En prenant en compte les conditions initiales (A.6) la solution s'écrit :

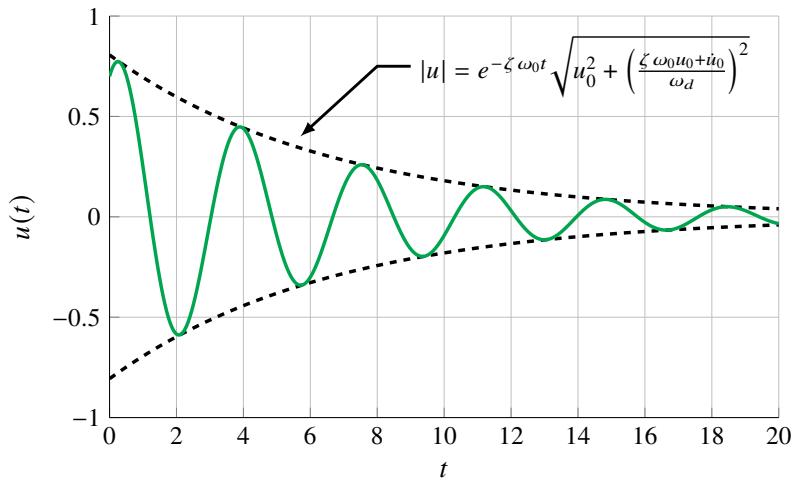
$$u = e^{-\zeta \omega_0 t} \left[ s_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta \omega_0 s_0 + \dot{s}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \quad (\text{A.23})$$

où  $\omega_d$  représente la **pulsation propre apparente** définie par :

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (\text{A.24})$$

Un exemple de solution (A.23) est en Fig. A.4. Le mouvement observé est celui d'une oscillation harmonique de période  $T_d = 2\pi/\omega_d$  et d'amplitude  $|u|$  décroissante dans le temps, exprimée par :

$$|u| = e^{-\zeta \omega_0 t} \sqrt{u_0^2 + \left( \frac{\zeta \omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \right)^2}. \quad (\text{A.25})$$



**FIGURE A.4.** Vibrations libres d'un oscillateur harmonique amorti (A.23) (ligne bleue pleine) et son amplitude  $|u|$  donnée par l'Éq. (A.25) (ligne noire pointillée) avec conditions initiales  $u(0) = s_0$  et  $\dot{u}(t) = \dot{s}_0$ .

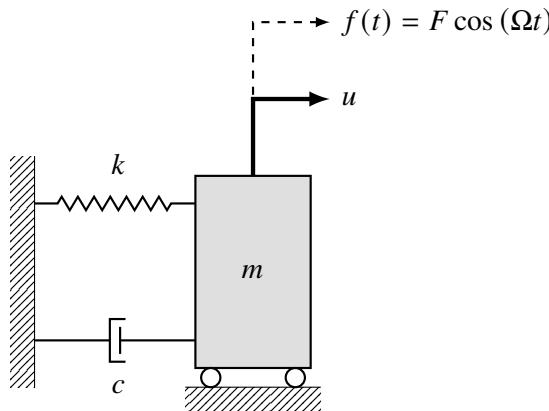
### A.1.2 Réponse forcée harmonique

Le cas d'un oscillateur harmonique excité par une force également harmonique de pulsation  $\omega$  est maintenant abordé (cf. Fig. A.5). L'équation du mouvement s'exprime alors par

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F}{m} \cos(\Omega t). \quad (\text{A.26})$$

La solution générale de l'équation (A.26) représente la somme de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre)  $u^h$ , c'est-à-dire de l'équation (A.18), et d'une solution particulière  $u^p$

$$u(t) = u^h(t) + u^p(t). \quad (\text{A.27})$$



**FIGURE A.5.** Système masse-ressort avec amortisseur visqueux excité par une forme harmonique  $F \cos(\Omega t)$ .

La solution générale de l'équation sans second membre est donnée par l'équation (A.23) : elle représente un mouvement oscillant d'amplitude décroissante dans le temps (valable lorsque  $c \neq 0$ ), devenant négligeable à long terme ; on parlera alors de **régime stationnaire**. Reste alors à évaluer la **solution stationnaire** de l'équation (A.26), c'est-à-dire la solution particulière. Une première tentative consisterait à chercher cette solution sous la forme  $u^p = U^p \cos(\Omega t - \varphi)$ , où  $\varphi$  le déphasage entre l'excitation et la réponse, en accord avec l'excitation imposée. Cette tentative, quoi que bien adaptée pour les systèmes sans

amortissement, s'avère cependant délicate lorsque  $c \neq 0$  dans le sens où une simplification par  $\cos(\Omega t)$  n'est pas possible si l'on considère la dérivée  $\dot{u}$  qui induit un terme  $\sin(\Omega t)$  dans l'équation (A.26). La stratégie à adopter consiste alors à ajouter de façon complètement artificielle une partie imaginaire (qui comme son nom l'indique est parfaitement imaginaire) au signal réel en remplaçant les fonctions trigonométriques par des exponentielles complexes. Donc si on cherche une solution de la forme  $u^p = U\cos(\Omega t - \varphi)$ , on travaillera avec le signal complexe associé  $\hat{u}^p$  tel que

$$\hat{u}^p = U^p (\cos(\Omega t - \varphi) + j\sin(\Omega t - \varphi)) = U^p e^{j(\Omega t - \varphi)} = \hat{U}^p e^{j\Omega t} \quad (\text{A.28})$$

et donc  $u^p = \text{Re}[\hat{u}^p]$ . Le terme  $\hat{U}^p = U^p e^{-j\varphi}$  représente l'**amplitude complexe** du mouvement, elle contient deux informations : l'amplitude (son module) et la phase à l'origine des temps (son argument).

Dans ce cadre, l'équation du mouvement s'écrit alors par

$$\ddot{\hat{u}} + 2\zeta\omega_0\dot{\hat{u}} + \omega_0^2\hat{u} = \frac{F}{m}e^{j\Omega t}, \quad (\text{A.29})$$

avec  $f = \text{Re}\{Fe^{j\Omega t}\}$ .

La solution particulière de cette équation est donc recherchée sous la forme suivante (complexe) :

$$\hat{u} = \hat{U}e^{j\Omega t}, \quad (\text{A.30})$$

où  $U$  représente l'**amplitude complexe** du mouvement. En insérant cette forme de solution dans l'équation (A.29) et en simplifiant par  $e^{j\Omega t}$ , on obtient alors :

$$\hat{u}^p(t) = \beta U_F^{\text{st}} e^{j(\Omega t - \varphi)} \quad (\text{A.31a})$$

$$u^p(t) = \beta U_F^{\text{st}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (\text{A.31b})$$

avec

$$U_F^{\text{st}} = \frac{F}{k}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\Omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\Omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg \left[ 1 - (\Omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\Omega/\omega_0 \right] \quad (\text{A.32})$$

où  $U_F^{\text{st}}$  représente la réponse statique du système, obtenue lorsque  $\Omega = 0$ , alors que  $\beta$  et  $\varphi$  représentent respectivement le **coefficent d'amplification dynamique** et le **déphasage** (entre l'excitation et la réponse) du signal.

On peut finalement écrire l'expression de  $u(t)$  en prenant la partie réelle de la solution stationnaire écrite précédemment et en la sommant à la solution du système homogène :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)] + \beta U_F^{\text{st}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (\text{A.33})$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées à partir des conditions initiales  $u|_{t=0} = s_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = \dot{s}_0$ , après calcul on trouve :

$$A = s_0 - \beta U_F^{\text{st}} \cos(\varphi)$$

et

$$B = \frac{\zeta s_0 \omega_0 + \dot{s}_0 - \beta U_F^{\text{st}} (\zeta \omega_0 \cos(\varphi) + \Omega \sin(\varphi))}{\omega_d}.$$

*Démonstration.* Soit l'équation du mouvement complexe suivante :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k\hat{u} = Fe^{j\Omega t} \Leftrightarrow \ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2\hat{u} = \frac{F}{m}e^{j\Omega t} \quad (\text{A.34})$$

On cherche une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage  $\hat{U}^p = \hat{U}^p e^{j\Omega t}$ . Cette dernière est introduite dans l'équations du mouvement, ce qui donne :

$$-\Omega^2 \hat{U}^p e^{j\Omega t} + j\Omega 2\zeta\omega_0 \hat{U}^p e^{j\Omega t} + \omega_0^2 \hat{U}^p e^{j\Omega t} = \frac{F}{m} e^{j\Omega t} \quad (\text{A.35})$$

Après simplification en divisant par  $e^{j\Omega t}$  et  $\omega_0^2$  et en notant que  $F/(m\omega_0^2) = F/k$  on a arrive bien à :

$$\hat{U}^p = \frac{F/k}{1 - (\Omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\Omega/\omega_0} = U^{\text{st}} A_\Omega = U^{\text{st}} \beta e^{-j\varphi} \quad (\text{A.36})$$

La solution particulière complexe est  $\hat{U}^p(t) = \beta U^{\text{st}} e^{j(\Omega t - \varphi)}$  et donc  $u^p(t) = \text{Re}[\hat{U}^p(t)] = \beta U^{\text{st}} \cos(\Omega t - \varphi)$ .

Par conséquent, la solution générale est :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)] + \beta U^{\text{st}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (\text{A.37})$$

En prenant en compte les conditions initiales  $u(0) = s_0$  et  $\dot{u}(0) = \dot{s}_0$  les expressions de  $A$  et  $B$  sont obtenues :

$$A = u_0 - \beta U^{\text{st}} \cos(\varphi) \quad \text{et} \quad B = \frac{\zeta u_0 \omega_0 + \dot{u}_0 - \beta U^{\text{st}} (\zeta \omega_0 \cos(\varphi) + \Omega \sin(\varphi))}{\omega_d} \quad (\text{A.38})$$

■

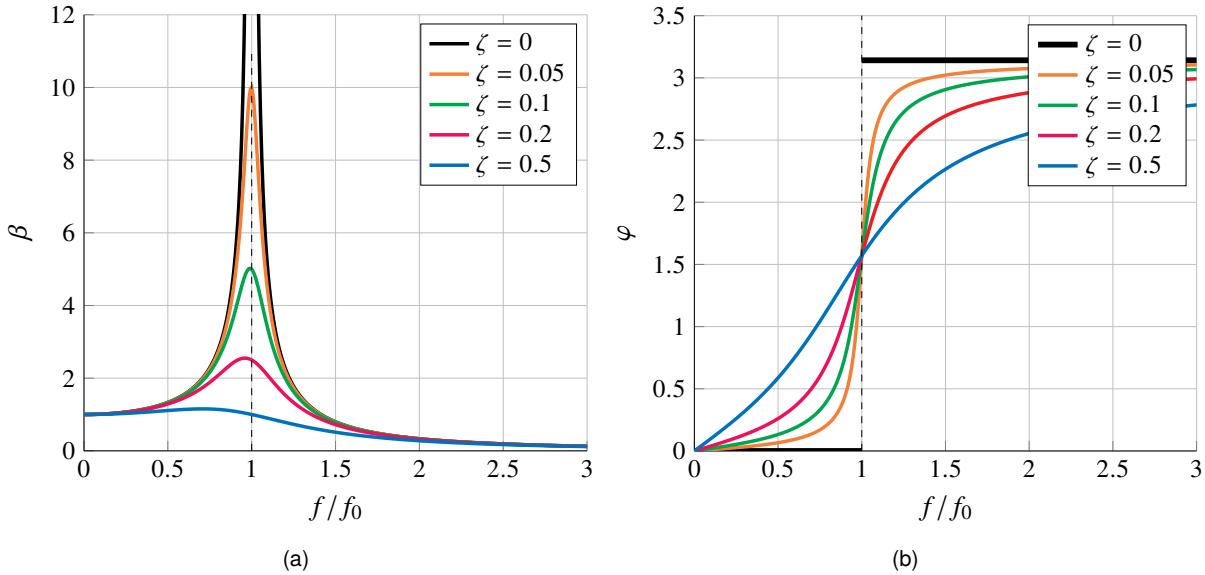
Les variations en fréquences du coefficient d'amplification dynamique  $\beta$  et du déphasage  $\varphi$  sont tracées sur les Fig. A.6 pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\zeta$ , en fonction de la fréquence adimensionnée  $f/f_0 = \Omega/\omega_0$ . Les résultats observés peuvent être résumés de la manière suivante :

- L'amplitude du déplacement de la masse est décrise à partir du coefficient d'amplification dynamique. Ce dernier révèle un maximum au voisinage de la fréquence propre  $f_0$  : c'est le **phénomène de résonance**. Plus l'amortissement est faible et plus l'amplitude de ce maximum est forte. L'amplitude devient infinie pour  $\zeta = 0$  lorsque  $f = f_0$  (note : ce cas ne se produit jamais en réalité du fait des mécanismes de dissipation d'énergie). Lorsque  $f/f_0 \rightarrow 0$ , l'amplitude du déplacement approche la réponse statique  $|U| \rightarrow U_F^{\text{st}}$  ; lorsque  $f/f_0 \rightarrow \infty$ , l'amplitude du déplacement tend vers zéro  $|U| \rightarrow 0$ .
- Le déphasage entre l'excitation et la réponse de la masse varie de 0 (cas où la réponse et l'excitation sont en phase) à  $\pi$  (cas où la réponse et l'excitation sont en opposition de phase). Cette variation est d'autant plus brusque que le taux d'amortissement est faible. A la fréquence propre  $f = f_0$ , les signaux sont en quadrature de phase.

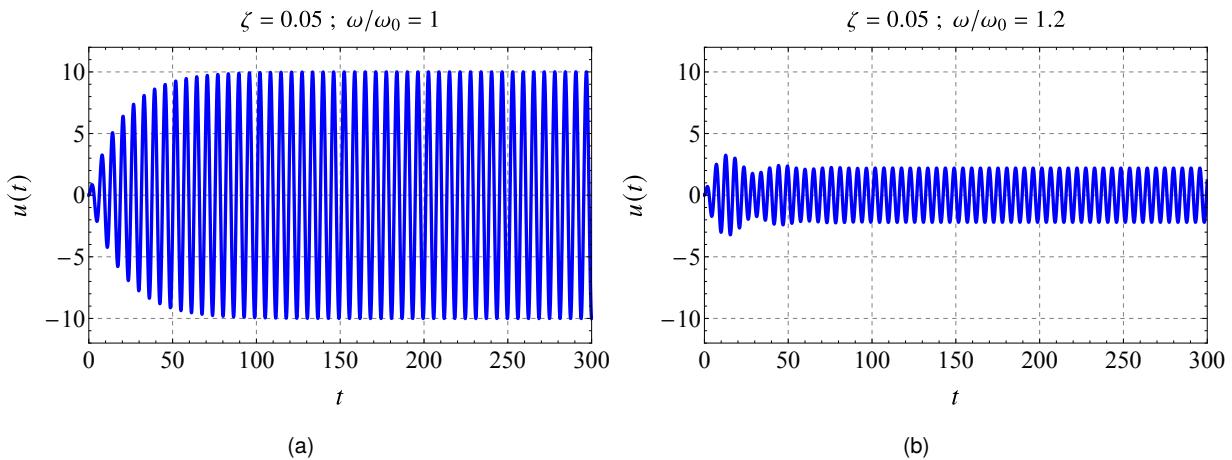
On définit la **fréquence de résonance**  $f_0^{\text{re}}$  comme la fréquence d'excitation qui correspond à la valeur maximale de l'amplitude  $|U|$ , c'est-à-dire à la valeur maximale du coefficient d'amplification dynamique  $\beta$ . Lorsque  $\zeta \neq 0$ , la fréquence de résonance ne correspond pas exactement à la fréquence propre  $f_0$ , c'est-à-dire :

$$f_0^{\text{re}} = f_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (\text{A.39})$$

On remarque également que la fréquence de résonance n'est pas non plus égal à la fréquence propre apparente  $f_d = f_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$  de l'oscillateur amorti.



**FIGURE A.6.** (a) Variation fréquentielle du coefficient d'amplification dynamique : cas d'une excitation par force imposée. (b) Variation fréquentielle du déphasage.



**FIGURE A.7.** Profil temporel de (A.33) pour  $\zeta = 0.05$  et pour deux valeur de fréquence adimensionnée : (a)  $f/f_0 = 1$  et (b)  $f/f_0 = 1.2$

**Remarque.** Quand il n'y a pas d'amortissement, alors :

$$f_0^{re} = f_d = f_0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_0^{re} = \omega_d = \omega_0 \quad (\text{A.40})$$

La profil temporel de (A.33) est montré en Fig. A.7 pour  $\zeta = 0.05$  et pour deux valeur de fréquence adimensionnée :  $f/f_0 = 1$  (Fig. A.7(a)) et  $f/f_0 = 1.2$  (Fig. A.7(b)). Ceci illustre encore un fois l'augmentation de l'amplitude des oscillations lorsque la fréquence du forçage est proche la fréquence de résonance.

### A.1.3 Principe de superposition

Le principe de superposition est l'une des grande propriétés des systèmes linéaires (paradoxalement il nous servira lors de la résolution de systèmes non linéaires).

Soit un oscillateur harmonique excité par une force  $f = f_1 + f_2 + \dots + f_N$  :

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = f_1 + f_2 + \dots + f_N. \quad (\text{A.41})$$

Si on considère les  $N$  sous-système suivants :

$$\ddot{u}_1 + 2\zeta\omega_0\dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = f_1 \quad (\text{A.42a})$$

$$\ddot{u}_2 + 2\zeta\omega_0\dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = f_2 \quad (\text{A.42b})$$

$$\vdots \quad (\text{A.42c})$$

$$\ddot{u}_N + 2\zeta\omega_0\dot{u}_N + \omega_0^2 u_N = f_N \quad (\text{A.42d})$$

alors le **principe de superposition** stipule que :

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_N(t). \quad (\text{A.43})$$

## A.2 Système à plusieurs degrés de liberté

### A.2.1 Modes de vibrations

Les **vibrations libres d'un système conservatif** à  $n$  DDLs peuvent être appréhendées à partir du système matriciel suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{A.44})$$

où **M** et **K** (les matrices de masse et de raideur respectivement) sont des matrices **définies positives** de taille  $n \times n$  et **u** est vecteur des déplacements de taille  $n \times 1$ .

On cherche cette fois des solutions **particulières synchrones**<sup>1</sup> (que l'on appelle **modes de vibrations**) de la forme générale :

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\phi(t). \quad (\text{A.45})$$

La substitution d'une solution de ce type dans l'équation du mouvement donne :

$$\ddot{\phi}(t)\mathbf{M}\mathbf{X} + \phi(t)\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X} = -\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X}$$

Les matrices **M** et **K** étant définie positive on a :

$$-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \Omega^2 = \frac{\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X}} > 0. \quad (\text{A.46})$$

Deux cas sont à considérer à ce stade :

1. **Systèmes avec une configuration d'équilibre stable**  $[\Omega^2 > 0]$  :

$$\ddot{\phi}(t) + \Omega^2\phi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{K}\mathbf{X} - \Omega^2\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

qui admet une solution non nulle  $\mathbf{X}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) telle que

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_i - \Omega_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_i \quad \text{et} \quad \phi_i(t) = A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)$$

où  $\Omega_i$  est l'une des  $n$  solutions de :

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0$$

1. Tous les degrés de liberté sont régis par la même fonction du temps.

2. Systèmes admettant des modes de corps rigide  $\mathbf{X}_r$  avec  $\Omega_r = 0$  ( $r = 1, \dots, n$ ) :

$$\ddot{\phi}_r(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}_r(t) = At + B \quad \text{et} \quad \mathbf{KX}_r = \mathbf{0}$$

Dans la suite on ignorera les modes de corps rigides.

Lorsque toutes les pulsations propres  $\{\Omega_i\}_{i=1, \dots, n}$  sont distinctes, les propriétés d'orthogonalité se résument à :

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{MX}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{X}_r^T \mathbf{KX}_s = 0 \quad \text{lorsque} \quad r \neq s. \quad (\text{A.47})$$

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les quantités scalaires  $\{m_i\}_{i=1, \dots, n}$  et  $\{k_i\}_{i=1, \dots, n}$  définies par :

$$m_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{MX}_i \quad , \quad k_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{KX}_i \quad (\text{A.48})$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}. \quad (\text{A.49})$$

*Démonstration.* Le problème aux valeurs propres est réécrit pour un mode donné  $\{(\Omega_s, \mathbf{X}_s)\}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{KX}_s &= \Omega_s^2 \mathbf{MX}_s \\ \mathbf{X}_r^T \mathbf{KX}_s &= \Omega_s^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{MX}_s \quad \text{avec} \quad r \neq s \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Même chose avec le mode  $\{(\Omega_r, \mathbf{X}_r)\}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{KX}_r &= \Omega_r^2 \mathbf{MX}_r \\ \mathbf{X}_s^T \mathbf{KX}_r &= \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{MX}_r \quad \text{avec} \quad r \neq s \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

On effectue ensuite  $(\text{A.50})^T - (\text{A.51})$  :

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}^T \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_s^T \mathbf{KX}_r = \Omega_s^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}^T \mathbf{X}_r - \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{MX}_r$$

Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  étant symétriques, donc  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$  et donc :

$$(\Omega_r^2 - \Omega_s^2) \mathbf{X}_s^T \mathbf{MX}_r = 0$$

Finalement, comme  $\Omega_r \neq \Omega_s$  on a alors

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{MX}_r = 0$$

et comme  $\mathbf{X}_s^T \mathbf{KX}_r = \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{MX}_r$  on a également

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{KX}_r = 0.$$

■

Les vecteurs propres  $\mathbf{X}_i$  sont définis à une constante près, on peut donc les **normaliser par rapport à la matrice de masse** :

$$\mathbf{Y}_i = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T \mathbf{MX}_i}} = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{m_i}}. \quad (\text{A.52})$$

Quand on considère les modes  $\{(\Omega_i, \mathbf{Y}_i)\}_{i=1,\dots,n}$  on a :  $m_i = 1$  et  $\Omega_i = \sqrt{k_i}$ . Dans la suite on suppose que les modes sont normalisés par rapport à la matrice de masse.

### A.2.2 Principe de la décomposition modale

Parce que les vecteurs propres  $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1,\dots,n}$  sont **indépendants et orthogonaux par rapport aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$**  ils forment **une base de dimension  $n$**  permettant de représenter le comportement dynamique du système. De ce fait, le vecteur des déplacements  $\mathbf{u}$  peut être exprimé sur la base des modes de vibrations. La **décomposition modale** s'écrit :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{X}_i \quad (\text{A.53})$$

où les  $\phi_i$  sont les amplitudes **amplitudes modales** ou **coordonnées généralisées**, déterminées à partir des conditions initiales.

### A.2.3 Cas d'un système conservatif

Les vibrations libres d'un système conservatif à  $n$  DDL est décrit par la système matricielle suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

où  $\mathbf{u}_0$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  sont des vecteurs de taille  $n \times 1$  exprimant les conditions initiales.

En appliquant le principe de décomposition modale et les propriétés d'orthogonalité des modes, on montre que

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 & i = 1, \dots, n \\ \phi_i|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

La solution de chacune des  $n$  équations précédentes est connue (cf. Sect. A.1) :

$$\phi_i = \phi_{i0} \cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t) \quad (\text{A.56})$$

*Démonstration.* On écrit les équations du mouvement en remplaçant  $\mathbf{u}$  par sa décomposition modale :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{X}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_r^T \left( \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{X}_i \right) &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n \left( \ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} \right) &= \mathbf{0} \\ &= 1 \text{ si } r = i \\ &= \Omega_r^2 \text{ si } r = i \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement

$$\ddot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{A.57})$$

Pour les conditions initiales, si les modes sont normalisés par rapport à  $\mathbf{M}$ , on a :

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^n \phi_{i0} \mathbf{X}_i \Leftrightarrow \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^n \phi_{i0} \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i \Leftrightarrow \boxed{\phi_{i0} = \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0} \quad (\text{A.58})$$

et

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_{i0} \mathbf{X}_i \Leftrightarrow \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_{i0} \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i \Leftrightarrow \boxed{\dot{\phi}_{i0} = \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0} \quad (\text{A.59})$$

■

#### A.2.4 Cas d'un système dissipatif

Les vibrations libres d'un système dissipatif à  $n$  DDL est décrit par la système matricielle suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (\text{A.60})$$

où  $\mathbf{u}_0$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  sont des vecteurs de taille  $n \times 1$  exprimant les conditions initiales.

On considère un **amortissement de Rayleigh** en supposant que la matrice d'amortissement **proportionnelle à la matrice de masse et de raideur** :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

Dans ce cas, l'orthogonalité des formes propres  $\mathbf{X}_i$  est également vérifiée vis-à-vis de la matrice  $\mathbf{C}$ .

Par conséquent, en appliquant le principe de décomposition modale et les propriétés d'orthogonalité des modes, on montre que

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \quad i = 1, \dots, n \\ \phi_i|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}}, \quad \dot{\phi}_i|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

avec  $\zeta_i$  les **taux d'amortissements modaux**, définis tels que :

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i \right).$$

La solution de chacune des  $n$  équations précédentes est connue (cf. Sect. A.1) :

$$\phi_i = e^{-\zeta_i \Omega_i t} \left[ \phi_{i0} \cos(\Omega_{id} t) + \frac{\zeta_i \Omega_{id} \phi_{i0} + \dot{\phi}_{i0}}{\Omega_{id}} \sin(\Omega_{id} t) \right] \quad (\text{A.62})$$

avec

$$\Omega_{id} = \Omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}.$$

*Démonstration.* On doit résoudre, par décomposition modale, le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \\ \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} &= a \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}_{= 1 \text{ si } r = i} + b \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} \\ &= c_i \text{ si } r = i \quad = 1 \text{ si } r = i \quad = \Omega_i^2 \text{ si } r = i \end{aligned}$$

Les **coefficients d'amortissement modaux** et les **taux d'amortissement modaux** sont donc :

$$c_i = a + b\Omega_i^2 \quad \text{et} \quad \zeta_i = \frac{c_i}{2\Omega_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i \right)$$

Pour retrouver (A.61), on va décomposer le vecteur  $\mathbf{u}$  sur **la base des modes propres du système homogène et sans amortissement associé** :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{X}_i &= \mathbf{0} \\ \mathbf{X}_r^T \left( \mathbf{M} \sum_{i=1}^n \ddot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \dot{\phi}_i \mathbf{X}_i + \mathbf{K} \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{X}_i \right) &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n \left( \ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} + \dot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{X}_i}_{= c_i \text{ si } r = i} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i}_{= 0 \text{ si } r \neq i} \right) &= \mathbf{0} \\ &= \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\ddot{\phi} + 2\zeta_i \Omega_i \dot{\phi} + \Omega_i^2 \phi = 0 \quad (\text{A.63})$$

Les conditions initiales se traitent comme dans la démonstration précédente. Finalement le problème de dimension  $n$  initial est équivalent aux  $n$  sous-problèmes décrits par (A.61) dont les solutions sont données par (A.62). ■



## Code Python pour le moyennage du modèle simplifié d'aile d'avion

Cette annexe présente le programme *Python* utilisant la bibliothèque de calcul formel *Sympy* qui permet d'obtenir, en Sect. 4.2.3.1, les expressions des fonctions  $f_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) (cf. Éq. (4.65)) et  $h_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) (cf. Éq. (4.67)).

```

1 from sympy import *
2
3
4 # Definition des variables symboliques
5 t, a1, a1p, phi1, phi1p, a2, a2p, phi2, phi2p, epsilon, sigma1, sigma2=symbols('t a1 a1p phi1
6     phi1p a2 a2p phi2 phi2p epsilon sigma1 sigma2')
7 omega12, omega21, zeta11, zeta22, zeta12, zeta21, g11, g12, g21, g22=symbols('omega12 omega21
8     zeta11 zeta22 zeta12 zeta21 g11 g12 g21 g22')
9 omega = Symbol('omega', positive=True)
10 phi = Symbol('phi')
11
12 # Definition de x et des ses derivees selon la methode de moyennage de Bogoliubov-
13 # Krylov
14 x=a1*cos(omega*t+phi1)
15 xp=-a1*omega*sin(omega*t+phi1)
16 xpp=-a1p*omega*sin(omega*t+phi1)-a1*phi1p*omega*cos(omega*t+phi1)-a1*omega**2*cos(
17     omega*t+phi1)
18
19 # Definition de alpha et des ses derivees selon la methode de moyennage de Bogoliubov-
20 # Krylov
21 alpha=a2*cos(omega*t+phi2)
22 alphap=-a2*omega*sin(omega*t+phi2)
23 alphapp=-a2p*omega*sin(omega*t+phi2)-a2*phi2p*omega*cos(omega*t+phi2)-a2*omega**2*cos(
24     omega*t+phi2)
25
26 # Definition formelle des equations du mouvement
27 equation1 = xpp+(omega**2+sigma1*epsilon)*x+epsilon*(omega12*alpha+zeta11*xp+zeta12*
28     alphap+g11*x**3+g12*alpha**3)
29 equation2 = alphapp+(omega**2+sigma2*epsilon)*alpha+epsilon*(omega21*x+zeta21*xp+
30     zeta22*alphap+g21*x**3+g22*alpha**3)
31
32 # =====
33 # Obtention des equations moyennees
34 # =====
35 # Equation pour a1
36 preEqA1a=equation1.replace(phi1p,a1p*cos(omega*t+phi1)/(a1*sin(omega*t+phi1)))
37 preEqA1b=preEqA1a*sin(omega*t+phi1)

```

```

31 solA1pa=solve(preEqA1b ,a1p)
32 solA1pb=trigsimp(solA1pa[0])
33 preEqA1c=simplify(integrate(omega/(2*pi)*solA1pb ,(t, 0, 2*pi/omega)))
34 EqA1=preEqA1c.replace(phi2,phi1-phi)
35
36 # Equation pour phi1
37 preEqPhi1a=equation1.replace(a1p,phi1p*a1*sin(omega*t+phi1)/(cos(omega*t+phi1)))
38 preEqPhi1b=preEqPhi1a*cos(omega*t+phi1)
39 solPhi1pa=solve(preEqPhi1b,phi1p)
40 solPhi1pb=trigsimp(solPhi1pa[0])
41 preEqPhi1c=simplify(integrate(omega/(2*pi)*solPhi1pb ,(t, 0, 2*pi/omega)))
42 EqPhi1=preEqPhi1c.replace(phi2,phi1-phi)
43
44 # Equation pour a2
45 preEqA2a=equation2.replace(phi2p,a2p*cos(omega*t+phi2)/(a2*sin(omega*t+phi2)))
46 preEqA2b=preEqA2a*sin(omega*t+phi2)
47 solA2pa=solve(preEqA2b,a2p)
48 solA2pb=trigsimp(solA2pa[0])
49 preEqA2c=simplify(integrate(omega/(2*pi)*solA2pb ,(t, 0, 2*pi/omega)))
50 EqA2=preEqA2c.replace(phi2,phi1-phi)
51
52 # Equation pour phi2
53 preEqPhi2a=equation2.replace(a2p,phi2p*a2*sin(omega*t+phi2)/(cos(omega*t+phi2)))
54 preEqPhi2b=preEqPhi2a*cos(omega*t+phi2)
55 solPhi2pa=solve(preEqPhi2b,phi2p)
56 solPhi2pb=trigsimp(solPhi2pa[0])
57 preEqPhi2c=simplify(integrate(omega/(2*pi)*solPhi2pb ,(t, 0, 2*pi/omega)))
58 EqPhi2=preEqPhi2c.replace(phi2,phi1-phi)
59
60 # Equation pour phi=phi1-phi2
61 EqPhi=simplify(EqPhi1-EqPhi2)

```

```

1 >>>solA1pb
2 epsilon*(a1**3*g11*cos(omega*t + phi1)**3 - a1*omega*zeta11*sin(omega*t + phi1) + a1*
   sigma1*cos(omega*t + phi1) + a2**3*g12*cos(omega*t + phi2)**3 - a2*omega*zeta12*
   sin(omega*t + phi2) + a2*omega12*cos(omega*t + phi2))*sin(omega*t + phi1)/omega
3
4 >>>EqA1
5 -epsilon*(4*a1*omega*zeta11 - 3*a2**3*g12*sin(phi) + 4*a2*omega*zeta12*cos(phi) - 4*
   a2*omega12*sin(phi))/(8*omega)

```

Ce qui donne :

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{\omega} \epsilon \sin(t\omega + \varphi_1) \left( a_1^3 g_{11} \cos^3(t\omega + \varphi_1) + a_1 (\sigma_1 \cos(t\omega + \varphi_1) - \zeta_{11} \omega \sin(t\omega + \varphi_1)) + a_2 \left( a_2^2 g_{12} \cos^3(t\omega + \varphi_2) - \zeta_{12} \omega \sin(t\omega + \varphi_2) + \omega_{12} \cos(t\omega + \varphi_2) \right) \right) \quad (B.1)$$

et, après moyennage :

$$\dot{a}_1 = \frac{\epsilon (-4a_2 \zeta_{12} \omega \cos(\varphi) - 4a_1 \zeta_{11} \omega + a_2 \sin(\varphi) (3a_2^2 g_{12} + 4\omega_{12}))}{8\omega}. \quad (B.2)$$

```

1 >>>solPhi1pb
2 epsilon*(a1**3*g11*cos(omega*t + phi1)**3 - a1*omega*zeta11*sin(omega*t + phi1) + a1*
   sigma1*cos(omega*t + phi1) + a2**3*g12*cos(omega*t + phi2)**3 - a2*omega*zeta12*
   sin(omega*t + phi2) + a2*omega12*cos(omega*t + phi2))*cos(omega*t + phi1)/(a1*
   omega)
3
4 >>>EqPhi1
5 epsilon*(3*a1**3*g11 + 4*a1*sigma1 + 3*a2**3*g12*cos(phi) + 4*a2*omega*zeta12*sin(phi)
   + 4*a2*omega12*cos(phi))/(8*a1*omega)

```

Ce qui donne :

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{a_1 \omega} \epsilon \cos(t\omega + \varphi_1) \left( a_1^3 g_{11} \cos^3(t\omega + \varphi_1) + a_1 (\sigma_1 \cos(t\omega + \varphi_1) - \zeta_{11} \omega \sin(t\omega + \varphi_1)) + a_2 \left( a_2^2 g_{12} \cos^3(t\omega + \varphi_2) - \zeta_{12} \omega \sin(t\omega + \varphi_2) + \omega_{12} \cos(t\omega + \varphi_2) \right) \right) \quad (B.3)$$

et, après moyennage :

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\epsilon (4a_2 \zeta_{12} \omega \sin(\varphi) + a_2 \cos(\varphi) (3a_2^2 g_{12} + 4\omega_{12}) + 3a_1^3 g_{11} + 4a_1 \sigma_1)}{8a_1 \omega}. \quad (B.4)$$

```

1 >>>solA2pb
2 epsilon*(a1**3*g21*cos(omega*t + phi1)**3 - a1*omega*zeta21*sin(omega*t + phi1) + a1*
   omega21*cos(omega*t + phi1) + a2**3*g22*cos(omega*t + phi2)**3 - a2*omega*zeta22*
   sin(omega*t + phi2) + a2*sigma2*cos(omega*t + phi2))*sin(omega*t + phi2)/omega
3
4 >>>EqA2
5 -epsilon*(3*a1**3*g21*sin(phi) + 4*a1*omega*zeta21*cos(phi) + 4*a1*omega21*sin(phi) +
   4*a2*omega*zeta22)/(8*omega)

```

Ce qui donne :

$$\dot{a}_2 = \frac{\epsilon \sin(t\omega + \varphi_2)}{\omega} \times \left( a_1^3 g_{21} \cos^3(t\omega + \varphi_1) + a_2 \left( a_2^2 g_{22} \cos^3(t\omega + \varphi_2) - \zeta_{22} \omega \sin(t\omega + \varphi_2) + \sigma_2 \cos(t\omega + \varphi_2) \right) + a_1 (\omega_{21} \cos(t\omega + \varphi_1) - \zeta_{21} \omega \sin(t\omega + \varphi_1)) \right) \quad (B.5)$$

et, après moyennage :

$$\dot{a}_2 = -\frac{\epsilon (4(a_1 \zeta_{21} \omega \cos(\varphi) + a_2 \zeta_{22} \omega + a_1 \omega_{21} \sin(\varphi)) + 3a_1^3 g_{21} \sin(\varphi))}{8\omega}. \quad (B.6)$$

```

1 >>>solPhi2pb
2 epsilon*(a1**3*g21*cos(omega*t + phi1)**3 - a1*omega*zeta21*sin(omega*t + phi1) + a1*
   omega21*cos(omega*t + phi1) + a2**3*g22*cos(omega*t + phi2)**3 - a2*omega*zeta22*
   sin(omega*t + phi2) + a2*sigma2*cos(omega*t + phi2))*cos(omega*t + phi2)/(a2*
   omega)
3
4 >>>EqPhi2
5 epsilon*(3*a1**3*g21*cos(phi) - 4*a1*omega*zeta21*sin(phi) + 4*a1*omega21*cos(phi) +
   3*a2**3*g22 + 4*a2*sigma2)/(8*a2*omega)

```

Ce qui donne :

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\epsilon \cos(t\omega + \varphi_2)}{a_2 \omega} \times \left( a_1^3 g_{21} \cos^3(t\omega + \varphi_1) + a_2 \left( a_2^2 g_{22} \cos^3(t\omega + \varphi_2) - \zeta_{22} \omega \sin(t\omega + \varphi_2) + \sigma_2 \cos(t\omega + \varphi_2) \right) + a_1 (\omega_{21} \cos(t\omega + \varphi_1) - \zeta_{21} \omega \sin(t\omega + \varphi_1)) \right) \quad (B.7)$$

et, après moyennage :

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\epsilon (-4a_1 \zeta_{21} \omega \sin(\varphi) + a_1 \cos(\varphi) (3a_1^2 g_{21} + 4\omega_{21}) + 3a_2^3 g_{22} + 4a_2 \sigma_2)}{8a_2 \omega}. \quad (B.8)$$

```

1 >>>EqPhi
2 epsilon*(-a1*(3*a1**3*g21*cos(phi) - 4*a1*omega*zeta21*sin(phi) + 4*a1*omega21*cos(phi) + 3*a2**3*g22 + 4*a2*sigma2) + a2*(3*a1**3*g11 + 4*a1*sigma1 + 3*a2**3*g12*cos(phi) + 4*a2*omega*zeta12*sin(phi) + 4*a2*omega12*cos(phi)))/(8*a1*a2*omega)

```

Ce qui donne :

$$\dot{\varphi} = \frac{\epsilon (4a_2\zeta_{12}\omega \sin(\varphi) + a_2 \cos(\varphi) (3a_2^2g_{12} + 4\omega_{12}) + 3a_1^3g_{11} + 4a_1\sigma_1)}{8a_1\omega} - \frac{\epsilon (-4a_1\zeta_{21}\omega \sin(\varphi) + a_1 \cos(\varphi) (3a_1^2g_{21} + 4\omega_{21}) + 3a_2^3g_{22} + 4a_2\sigma_2)}{8a_2\omega}. \quad (\text{B.9})$$

# Formules trigonométriques

## Formules d'addition

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

## Formules de multiplication des arcs

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

## Formules de développement

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A - B) + \cos(A + B)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 A = \frac{1}{2} (1 + \cos 2A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos^3 A = \frac{1}{4} (3 \cos A + \cos 3A)}$$

$$\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2 A = \frac{1}{2} (1 - \cos 2A)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin^3 A = \frac{1}{4} (3 \sin A - \sin 3A)}$$

$$\sin A \cos B = \frac{\sin(A + B) + \sin(A - B)}{2}$$

## Formules de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$



---

# Bibliographie

- [Bus18] A.W. BUSH : *Perturbation Methods for Engineers and Scientists*. CRC Press, 2018.
- [Her09] B. HERVÉ : *Crissement d'embrayage : Analyses linéaire, non-linéaire et étude expérimentale*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2009.
- [HP11] D.H. HODGES et G.A. PIERCE : *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Cambridge University Press, 2011.
- [LB66] A.M. LIAPUNOV et R. BELLMAN : *Stability of Motion*. Academic Press, 1966.
- [Mei01] L. MEIROVITCH : *Fundamentals of Vibrations*, chapitre 7. McGraw-Hill, 2001.
- [Nah07] A.H. NAHFEH : *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [Nay11] A.H. NAYFEH : *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Ltd, 2011.
- [NM07] A.H. NAHFEH et D.T. MOOK : *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [PCH17] A. PAPANGELO, M. CIAVARELLA et N. HOFFMANN : Subcritical bifurcation in a self-excited single-degree-of-freedom system with velocity weakening–strengthening friction law : analytical results and comparison with experiments. *Nonlinear Dynamics*, 90(3):2037–2046, 2017.
- [Sey10] R. SEYDEL : *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag New York, 3ème édition, 2010.
- [SM55] D. SINCLAIR et N. MANVILLE : Frictional vibrations. *Journal of Applied Mechanics*, pages 207–213, 1955.
- [Tho11] Olivier THOMAS : *Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques*. Habilitation à Diriger des Recherches, 2011.
- [Wig90a] S. WIGGINS : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, chapitre 19. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2nd ed édition, 1990.
- [Wig90b] S. WIGGINS : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, chapitre 20. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2nd ed édition, 1990.
- [Wig90c] S. WIGGINS : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2nd ed édition, 1990.