Vibrations des structures

Baptiste Bergeot

Maître de Conférences - baptiste.bergeot@insa-cvl.fr - bureau D03

4A INSA Centre Val de Loire

Génie des Systèmes Industriels (GSI)

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Plan du cours

Introduction générale

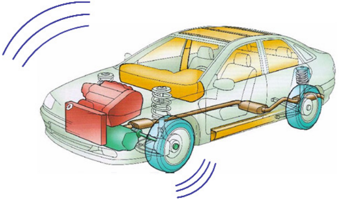
Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté
2.1 Introduction
2.2 Systèmes à deux degrés de liberté
2.3 Systèmes à *n* degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus
3.1 Introduction
3.2 Vibrations longitudinales des barres
3.3 Vibrations transversales des poutres

Bibliographie

(a)



(b)

Figure 1.1- Exemples de problématiques industrielles : (a) vibrations d'une automobile générant du bruit ; (b) instabilité aéroélastique du pont de Tacoma (avant destruction !).

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Introduction

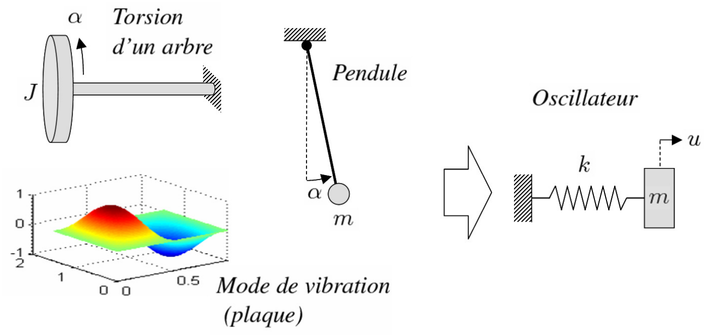


Figure 1.1- Exemples de systèmes à 1 DDL et oscillateur linéaire (m, k) équivalent.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Cas des systèmes non amortis

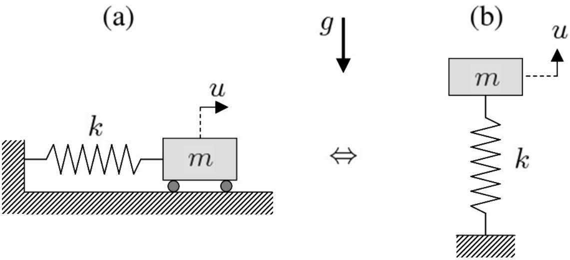


Figure 1.2- Système masse-ressort : (a) gravité non prise en compte ; (b) gravité prise en compte.

Équations du mouvement d'un oscillateur harmonique

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

$\Rightarrow$ u : déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique x_{eq}^{st}

✎ Démonstration 1.1

Force de rappel d'un ressort : norme proportionnelle à son allongement $\boxed{|F| = k(\ell - \ell_0)}$

k : raideur du ressort (N/m ou kg/s^2)
ℓ_0 : longueur du ressort à vide

ℓ : longueur du ressort hors équilibre

ℓ_{eq} : longueur du ressort à l'équilibre

✎ Démonstration 1.1

Force de rappel d'un ressort : norme proportionnelle à son allongement $\boxed{|F| = k(\ell - \ell_0)}$

k : raideur du ressort (N/m ou kg/s^2)
ℓ_0 : longueur du ressort à vide
ℓ : longueur du ressort hors équilibre
ℓ_{eq} : longueur du ressort à l'équilibre

$\Longrightarrow$ Configuration horizontale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers la droite :

- À l'équilibre :

$$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) = -k(x_{eq}^{st} - x_0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0}$$

- Hors équilibre :

$$ma = -k(\ell - \ell_0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient finalement :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.1

⇒ Configuration verticale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers le haut :

- À l'équilibre :

$$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) - mg = -k(x_{eq}^{st} - x_0) - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0 - \frac{mg}{k}}$$

- Hors équilibre :

$$ma = -k(\ell - \ell_0) - mg = -k(x - x_0 + \frac{mg}{k}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient également :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.2

⇒ Configuration verticale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers le haut :

- À l'équilibre :

$$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) - mg = -k(x_{eq}^{st} - x_0) - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0 - \frac{mg}{k}}$$

- Hors équilibre :

$$ma = -k(\ell - \ell_0) - mg = -k(x - x_0 + \frac{mg}{k}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient également :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

⇒ **Oscillateur harmonique** de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

Cas des systèmes non amortis

Solutions dans le cas non amorti

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \ \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}, \ \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

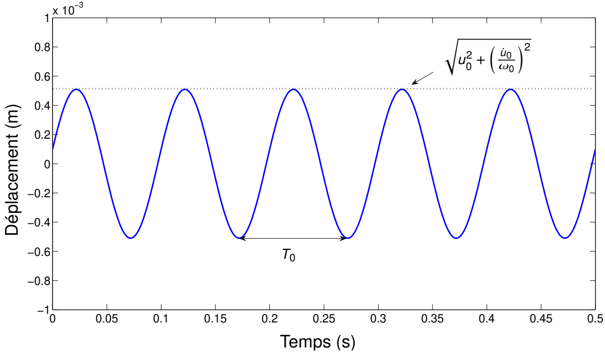


Figure 1.3- Vibrations libres d'un oscillateur (m, k) soumis aux conditions initiales $u(t = 0) = u_0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$.

✎ Démonstration 1.3

On a :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donc :

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{u} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

+ Conditions initiales : $u(t=0) = u_0$, $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = u_0}$ et $\boxed{B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}}$

d'où finalement :

$$\boxed{u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Pour calculer l'amplitude $|u| = D$ de la solution on pose :

$$u(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi) = D\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\right)$$

Par identification on a $A = D\cos(\varphi)$ et $B = -D\sin(\varphi)$ et donc

$$\boxed{D = |u| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et aussi} \quad \boxed{\tan\varphi = -\frac{B}{A}}$$

Cas des systèmes amortis

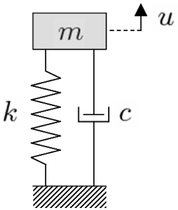


Figure 1.4- Système masse-ressort avec amortisseur visqueux.

Amortisseur visqueux

Pour ce type d'amortissement, la force F_c induite sur la masse est telle qu'elle s'oppose à sa vitesse, c'est-à-dire :

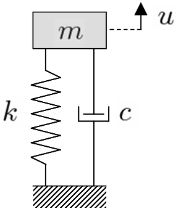
$$\boxed{F_c = -c\dot{u}}$$

c : coefficient d'amortissement (N.s/m ou kg/s)

Équations du mouvement

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.4



Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe vertical orienté vers le haut :

$$m\ddot{u} = -c\dot{u} - ku \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$$

Cas des systèmes amortis

Solutions générales du système amorti

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

ζ : taux d'amortissement

Plusieurs formes selon que $\boxed{\zeta < 1}$, $\boxed{\zeta = 1}$ ou $\boxed{\zeta > 1}$:

- **Mouvement sous-amorti :** $\zeta < 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]}$,

  où $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ représente la pulsation propre apparente du système.
  Dans ce cas, le mouvement est **pseudo-périodique** et l'**amplitude des oscillations suit une décroissance exponentielle**.

- **Mouvement critique :** $\zeta = 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\omega_0 t}[A + Bt]}$.

  Dans ce cas, le mouvement est **apériodique** : il n'y a pas de vibrations.

- **Mouvement sur-amorti :** $\zeta > 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[Ae^{-(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_0 t} + Be^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_0 t}\right]}$.

  Dans ce cas, le mouvement est **apériodique** : il n'y a pas de vibrations.

Cas des systèmes amortis

Solutions dans le cas sous-amorti

$$\boxed{u = e^{-\zeta\,\omega_0 t}\left[u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\,\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

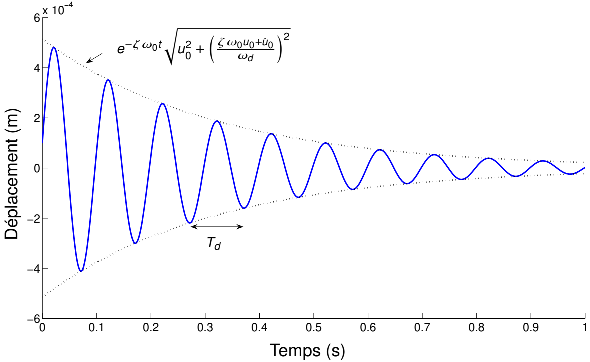


Figure 1.5- Vibrations libres d'un oscillateur (m, k, c) faiblement amorti ($\zeta = 0.05$), soumis à des conditions initiales arbitraires $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$.

✎ Démonstration 1.5

On a :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Le polynôme caractéristique P est $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ et son discriminant $\Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(-1+\zeta^2)$ donc les racines de P sont :

$$r_1 = -\zeta\omega_0 - j\,\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d} \qquad r_2 = -\zeta\omega_0 + j\,\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

En appliquant les règles usuelles de résolutions des équations différentielles du 2nd ordre on a bien si $\zeta < 1$:

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\omega_d A\sin(\omega_d t) + \omega_d B\cos(\omega_d t)\right]$$

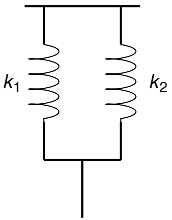
+ Conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0 \Rightarrow \boxed{A = u_0}$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \Rightarrow \dot{u}_0 = -\zeta\omega_0 A + \omega_d B \Rightarrow \boxed{B = \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}}$$

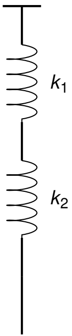
Ressorts et amortisseurs en parallèle et en série

En parallèle



$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$

En série



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{k_{eq} = \frac{k_1\ k_2}{k_1 + k_2}}$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Cas des systèmes amortis

Méthode du décrément logarithmique

Objectif : mesurer le taux d'amortissement ζ par la mesure de l'amplitude à t et $t + nT_d$

$$|u| = e^{-\zeta\omega_0 t}\text{Cste} \quad\Rightarrow\quad \frac{|u|_{t+nT_d}}{|u|_t} = e^{-\zeta\omega_0 nT_d} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\zeta = \frac{1}{\omega_0 nT_d}\ln\left\{\frac{|u|_t}{|u|_{t+nT_d}}\right\}}$$

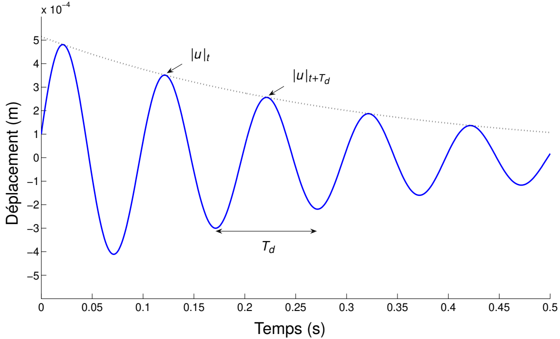


Figure 1.6- Variation d'amplitude de vibrations entre deux instants t et $t + T_d$, séparés d'une période T_d.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Introduction

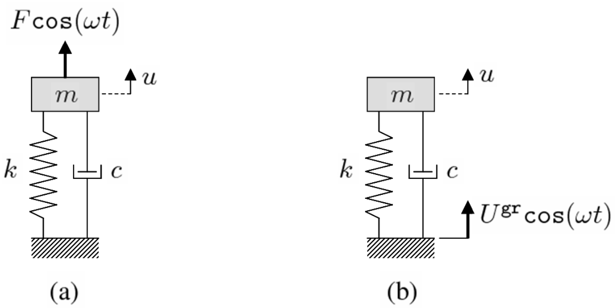


Figure 1.7- Système masse-ressort-amortisseur sous-excitation harmonique forcée : (a) excitation par force imposée à la masse ; (b) excitation par mouvement du support.

Équations du mouvement

Force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f}$$

Mouvement du support imposé

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\mathrm{gr}} + ku^{\mathrm{gr}}}$$

f et u^{gr} sont harmoniques de pulsation ω, c-à-d de la forme $A\cos(\omega t)$

Excitation par force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F\cos\omega t}$$

Solution Générale	=	Solution de l'équation homogène (sans second membre)	+	Solution particulière de l'équation avec second membre
u	=	u^h **Régime transitoire**	+	u^p **Régime stationnaire**

- **Régime transitoire :** connu, $\boxed{u^h = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]}$
- **Régime stationnaire :** on cherche une **solution harmonique de pulsation** ω (la pulsation d'excitation) de la forme $\boxed{u^p = U^p\cos(\omega t - \varphi)}$.
- **Deux cas possibles** pour la résolution :
  - **Sans amortissement ($c = 0$)** : fonctions trigonométriques ; $\boxed{u^p = U^p\cos(\omega t)}$
  - **Avec amortissement :** fonction exponentielles complexes

$\boxed{\hat{u}^p = U^p e^{j(\omega t - \varphi)} = \widehat{U}^p e^{j\omega t}}$ avec $\boxed{u^p = \mathrm{Re}\left[\hat{u}^p\right]}$ $\boxed{\hat{U}^P = U^p e^{-j\varphi}}$ **: amplitude complexe**

Excitation par force imposée

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} = Fe^{j\omega t}}$ avec $u = \text{Re}\left[\hat{u}\right]$
- Solution particulière de la forme $\boxed{\hat{u}^p = \hat{U}^p e^{j\omega t}}$ avec $\hat{U}^p$:

$$\boxed{\hat{U}^p = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = U^{\text{st}} A_\omega = U^{\text{st}} \beta e^{-j\varphi}}$$

$$\boxed{U^{\text{st}} = \frac{F}{k}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2 (\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg\left\{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0\right\}}$$

- Solution particulière $\hat{u}^p$:

$$\hat{u}^p(t) = \beta U^{\text{st}} e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^p(t) = \beta U^{\text{st}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta U^{\text{st}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

✎ Démonstration 1.6 et 1.7

On a l'équation du mouvement complexe suivante :

$$m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} = Fe^{j\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\hat{u}} + 2\zeta\omega_0\dot{\hat{u}} + \omega_0^2\hat{u} = \frac{F}{m}e^{j\omega t}$$

On cherche une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage $\hat{u}^p = \hat{U}^p e^{j\omega t}$. Cette dernière est introduite dans l'équations du mouvement :

$$-\omega^2\hat{U}^p e^{j\omega t} + j\omega 2\zeta\omega_0\hat{U}^p e^{j\omega t} + \omega_0^2\hat{U}^p e^{j\omega t} = \frac{F}{m}e^{j\omega t}$$

Après simplification par division par $e^{j\omega t}$ et division par ω_0^2 et en notant que $F/(m\omega_0^2) = F/k$ on a arrive bien à :

$$\hat{U}^p = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\omega/\omega_0} = U^{\text{st}}A_\omega = U^{\text{st}}\beta e^{-j\varphi}$$

La solution particulière est $\hat{u}^p(t) = \beta U^{\text{st}}e^{j(\omega t-\varphi)}$ et donc $u^p(t) = \text{Re}\left[\hat{u}^p(t)\right] = \beta U^{\text{st}}\cos(\omega t - \varphi)$.

La solution générale est donc :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta U^{\text{st}}\cos(\omega t - \varphi)$$

+ Conditions initiales : $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ qui mène à :

$$\boxed{A = u_0 - \beta U^{\text{st}}\cos(\varphi) \quad , \quad B = \frac{\zeta u_0\omega_0 + \dot{u}_0 - \beta U^{\text{st}}\left(\zeta\omega_0\cos(\varphi) + \omega\sin(\varphi)\right)}{\omega_d}}$$

Excitation par force imposée

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad , \quad \varphi = \arg\left\{1-(\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0\right\}$$

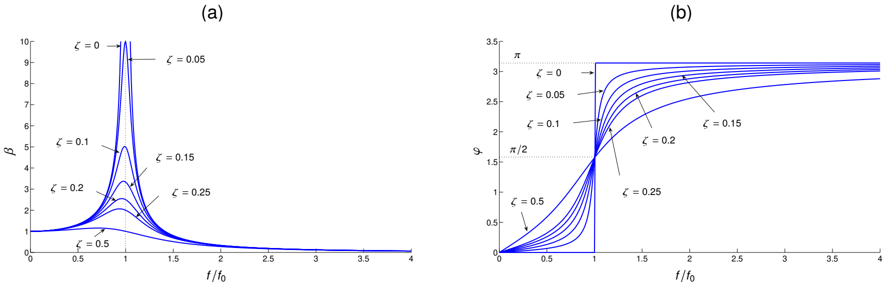


Figure 1.8- (a) Variation fréquentielle de β (b) Variation fréquentielle de φ.

- Amplitude maximale : $\boxed{\max\{\beta\} = \beta|_{f=f_0^{re}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0\sqrt{1-2\zeta^2}}$ $\boxed{\neq f_d = f_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

✎ Démonstration 1.8

- On rappelle l'expression de β :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

- Le maximum de β s'obtient lorsque le terme $(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2$ atteint un minimum.
- En effectuant le changement de variable $\Omega = (\omega/\omega_0)^2$, cela revient à résoudre

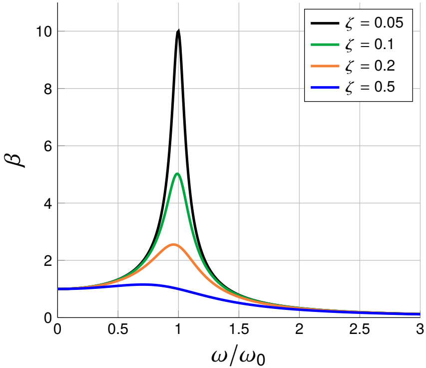
$$\frac{\partial}{\partial\Omega}\left[(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega^{re} = 1 - 2\zeta^2}$$

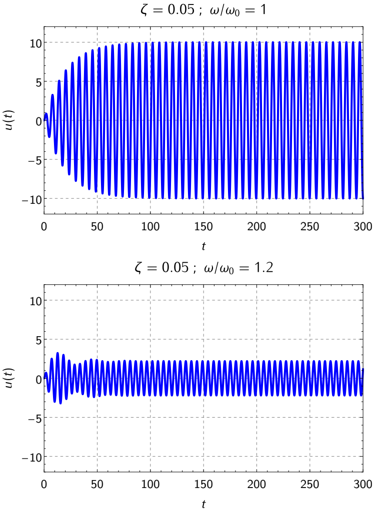
- On obtient alors

$$\max\{\beta\} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^{re})^2 + 4\zeta^2\Omega^{re}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2(1-2\zeta^2)}} = \boxed{\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Excitation par force imposée

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta\frac{F}{k}\cos\left(\omega t - \varphi\right)}$$





Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}}$

Excitation par force imposée

Méthode de la largeur de bande à -3dB

- On relève les valeurs de fréquences à $\beta = \max\{\beta\}/\sqrt{2}$ ($20\log_{10}\{1/\sqrt{2}\} \approx -3$dB) : il y en a deux. L'écart entre ces deux fréquences, noté Δf.

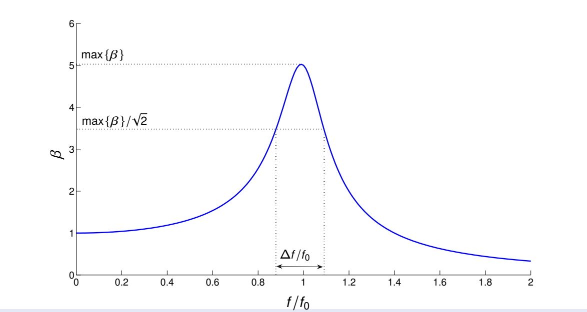


Figure 1.9- Illustration de la largeur de bande à $\max\{\beta\}/\sqrt{2}$.

- On déduit : $\boxed{\zeta = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f_0}}$

✎ Démonstration 1.9 – Méthode de la largeur de bande à −3dB

En posant $\Omega = (\omega/\omega_0)^2$, on a

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega}}$$

Comme

$$\frac{\max\{\beta\}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

résoudre $\beta = \max(\beta)/\sqrt{2}$ revient à chercher les deux valeurs de Ω telles que :

$$(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega = 8\zeta^2(1-\zeta^2)$$

qui s'écrit encore :

$$\Omega^2 + (4\zeta^2 - 2)\Omega + 1 - 8\zeta^2(1-\zeta^2) = 0$$

dont les racines sont :

$$\Omega_{1/2} = (1-2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

En supposant $\zeta \ll 1$, on obtient finalement :

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \pm 2\zeta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Omega_{1/2}} \approx 1 \pm \zeta \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 2\zeta \;\; (\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\zeta = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f_0}}$$

Excitation par déplacement imposé

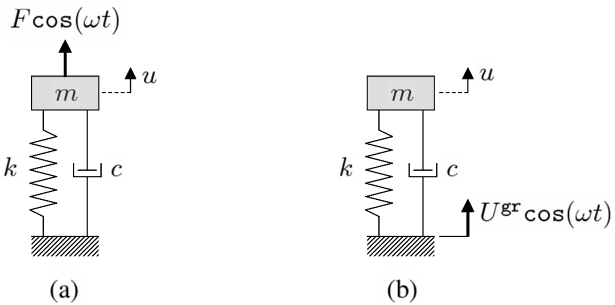


Figure 1.10- Système masse-ressort-amortisseur sous-excitation harmonique forcée : (a) excitation par force imposée à la masse ; (b) excitation par mouvement du support.

Équations du mouvement

Force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f}$$

Mouvement du support imposé

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{gr} + ku^{gr}}$$

f et u^{gr} sont harmoniques de pulsation ω, c-à-d de la forme $A\cos(\omega t)$

Excitation par déplacement imposé

Équation du mouvement dans le référentiel du support en mouvement

L'équation du mouvement, dans le *référentiel fixe*, est :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\mathrm{gr}} + ku^{\mathrm{gr}}}$$

On se place dans le *référentiel du support en mouvement* en posant

$$\boxed{u^* = u - u^{\mathrm{gr}}} \qquad \text{(\textbf{déplacement relatif})}$$

et on obtient :

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{\mathrm{gr}}}$$

qui devient

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = m\omega^2 U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)}$$

si $u^{\mathrm{gr}} = U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)$

✎ Démonstration 1.10

L'allongement du ressort est $\boxed{u - u^{gr}}$ et la vitesse relative de la masse par rapport au bâti (qui est en mouvement) est $\boxed{\dot{u} - \dot{u}^{gr}}$.

L'application du PFD à la masse donne donc :

$$m\ddot{u} = -k\left(u - u^{gr}\right) - c\left(\dot{u} - \dot{u}^{gr}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\mathrm{gr}} + ku^{\mathrm{gr}}}$$

En utilisant le déplacement relatif $u^* = u - u^{\mathrm{gr}}$ on obtient finalement :

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{\mathrm{gr}}$$

qui devient

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = m\omega^2 U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)}$$

si $u^{\mathrm{gr}} = U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)$.

Excitation par déplacement imposé

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = m\omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}}$ avec $u^* = \text{Re}\left[\hat{u}^*\right]$
- Solution particulière de la forme $\boxed{\hat{u}^{p^*} = \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}}$ avec $\hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}$:

$$\boxed{\hat{U}^{p^*} = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{\text{gr}}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = U^{\text{gr}} A^*_\omega = U^{\text{gr}} \beta^* e^{-j\varphi^*}}$$

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi^* = \varphi}$$

- Solution particulière $\hat{u}^{*^p}$:

$$\hat{u}^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} \cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + U^{gr}\left[\beta^* \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}}$$

Les constantes A et B sont déterminée à partir des conditions initiales.

✎ Démonstration 1.11

On a l'équation du mouvement complexe suivante :

$$m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = m\omega^2 U^{gr} e^{j\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\hat{u}}^* + 2\zeta\omega_0\dot{\hat{u}}^* + \omega_0^2\hat{u}^* = \omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}$$

On cherche une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage $\hat{u}^{p^*} = \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}$. Cette dernière est introduite dans l'équations du mouvement :

$$-\omega^2 \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} + j\omega 2\zeta\omega_0 \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} + \omega_0^2 \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} = \omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}$$

Après simplification par division par $e^{j\omega t}$ et division par ω_0^2 on a arrive bien à :

$$\hat{U}^{p^*} = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{\mathrm{gr}}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = U^{\mathrm{gr}} A_\omega^* = U^{\mathrm{gr}} \beta^* e^{-j\varphi^*}$$

La solution particulière est $\hat{u}^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} e^{j(\omega t - \varphi)}$ et donc $u^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} \cos(\omega t - \varphi)$.

La solution générale $u(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + U^{gr}\left[\beta^* \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}$$

+ Conditions initiales :$u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ qui mène à :

$$\boxed{A = u_0 - \beta U^{\mathrm{gr}}\left(1 + \cos(\varphi)\right) \quad , \quad B = \frac{\zeta\omega_0(u_0 - U^{\mathrm{gr}}) + \dot{u}_0 - \beta U^{\mathrm{gr}}(\zeta\omega_0\cos(\varphi) + \omega\sin(\varphi))}{\omega_d}}$$

Excitation par déplacement imposé

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

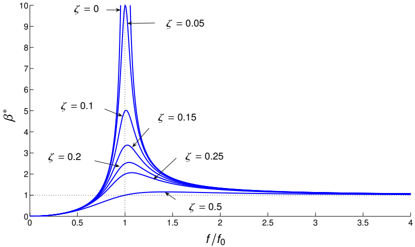
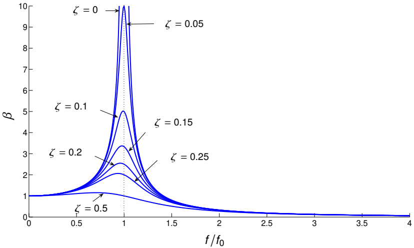


Figure 1.11- Variation fréquentielle du coefficient d'amplification dynamique : cas d'une excitation par déplacement imposé.

- Amplitude maximale : $\boxed{\max\{\beta^*\} = \beta^*|_{f=f_0^{re}} = \dfrac{1}{(1-2\zeta^2)\sqrt{1/(1-2\zeta^2)^2 - 1}}}$
- Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0/\sqrt{1-2\zeta^2}}$ $\boxed{\neq f_d = f_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

Force imposée

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

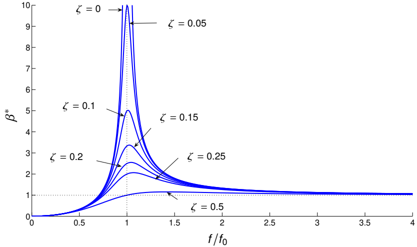


- $f/f_0 \to 0$; $\beta \to 1$; $|U| \to U_F^{\mathrm{st}}$
- $f/f_0 \to \infty$; $\beta \to 0$; $|U| \to 0$
- Fréquence de résonance :

$$f_0^{\mathrm{re}} = f_0\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Mouvement support imposé

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$



- $f/f_0 \to 0$; $\beta^* \to 0$; $|U^*| \to 0$; $u = u^{\mathrm{gr}}$
- $f/f_0 \to \infty$; $\beta^* \to 1$; $|U^*| \to U^{\mathrm{gr}}$
- Fréquence de résonance :

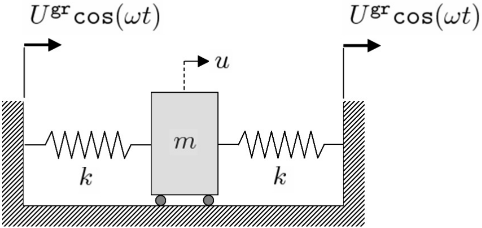
$$f_0^{\mathrm{re}} = f_0/\sqrt{1-2\zeta^2}$$

Excitation par déplacement imposé

Exercice 1.1.

Soit le système décrit par la figure ci-dessous.

1. Exprimer l'équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous, excité par déplacement imposé.
2. Donner la solution générale et donner la valeur du déplacement u en fonction des conditions initiales $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = 0$.



Excitation par accélération imposé $\gamma^{gr} = \Gamma^{gr}\cos(\omega t)$

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = -m\Gamma^{gr} e^{j\omega t}}$ avec $u^* = \text{Re}\left[\hat{u}^*\right]$
- Amplitude complexe U^{p^*} :

$$\boxed{U^{p^*} = \frac{-\Gamma^{gr}/\omega_0^2}{1-(\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2} A^*_\omega = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta^* e^{-j\varphi^*}}$$

$$\boxed{\beta^* = \beta \quad \text{et} \quad \varphi^* = \varphi}$$

- Solution particulière $\hat{u}^{*^p}$:

$$\hat{u}^{*^p}(t) = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^{*^p}(t) = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta\cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) = u^*(t) + \frac{\Gamma^{gr}}{\omega^2}(1-\cos(\omega t)) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] - \frac{\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\left[\beta\cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Principe de superposition

- Soit un oscillateur harmonique excité par $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_N$

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\,\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = f_1 + f_2 + \cdots + f_N}$$

- On considère les N sous-système suivants :

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + 2\zeta\,\omega_0\dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 &= f_1 \\
\ddot{u}_2 + 2\zeta\,\omega_0\dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 &= f_2 \\
&\vdots \\
\ddot{u}_N + 2\zeta\,\omega_0\dot{u}_N + \omega_0^2 u_N &= f_N
\end{aligned}$$

- Le **principe de superposition** stipule que :

$$\boxed{u^p(t) = u_1^p(t) + u_2^p(t) + \cdots + u_N^p(t)}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Équations du mouvement

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)}$$

avec $f(t)$ **un fonction périodique**.

Stratégie de résolution :

- On fait la **série de Fourier de** $f(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(t) = F_0 + \sum_{r\geq 1} \left[F_r \cos(r\omega t) + F'_r \sin(r\omega t)\right]}$

$$\boxed{F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad F_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(r\omega t)dt, \quad F'_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(r\omega t)dt}$$

- On considère plusieurs « **sous-problèmes harmoniques** »
- La **solution stationnaire** du mouvement (sous sa forme complexe), notée $\hat{u}^p$, s'obtient sur la base du **principe de superposition** :

$$\boxed{u^p = u_0 + \sum_{r\geq 1} \mathrm{Re}\left[U_r e^{rj\omega t}\right] + \mathrm{Im}\left[U'_r e^{rj\omega t}\right]}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Stratégie de résolution (suite) :

- u_0 représente une solution particulière de l'équation suivante :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0.}$$

- Les termes $\hat{U}_r e^{rj\omega t}$ et $\hat{U}'_r e^{rj\omega t}$ représentent des solutions particulières pour les sous-problèmes harmoniques suivants :

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} &= F_r e^{rj\omega t} \qquad \forall r \geq 1, \\ m\ddot{\hat{u}}' + c\dot{\hat{u}}' + k\hat{u}' &= F'_r e^{rj\omega t} \qquad \forall r \geq 1. \end{aligned}}$$

- L'obtention de ces solutions particulières ne pose pas de problèmes, c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{aligned} &u_0 = F_0/k, \\ &\hat{U}_r = \frac{F_r/k}{1-(r\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta r\omega/\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}_r = A_{r\omega} U_r^{\mathrm{st}} \qquad \forall r \geq 1, \\ &\hat{U}'_r = \frac{F'_r/k}{1-(r\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta r\omega/\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}'_r = A_{r\omega} U_r'^{\mathrm{st}} \qquad \forall r \geq 1, \end{aligned}}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

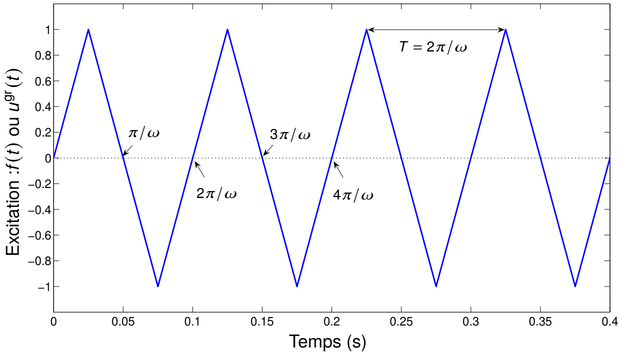


Figure 1.12- Illustration d'une excitation périodique non harmonique.

Exercice 1.2.

Donner la représentation en série de Fourier du signal périodique illustré sur la Figure 2.11.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté
1.1 Introduction
1.2 Vibrations libres
1.3 Réponse forcée harmonique
1.4 Réponse transitoire

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Excitation par force imposée

Équations du mouvement

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\,\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{f(t)}{m} = \bar{f}(t)}$$ avec $f(t)$ **un fonction quelconque**.

Stratégie de résolution :

- Calcul de la **fonction de Green** :

$$\boxed{\ddot{g}(t) + 2\zeta\,\omega_0\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t)}$$ avec $g(0) = 0$ (causalité)

- On peut montrer que : $\boxed{g(t) = e^{-\zeta\,\omega_0 t}\frac{1}{\omega_d}\mathcal{H}(t)\sin[\omega_d t]}$ ($\mathcal{H}(t)$: fonction de Heaviside)

- **Intégrale de superposition :** $\boxed{u^p(t) = \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau.}$

- Solution générale avec $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\,\omega_0 t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\,\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \frac{1}{\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\,\omega_0\tau}\bar{f}(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]}$$

✎ Démonstration 1.12 - Intégrale de superposition

$$\ddot{g}(t-\tau) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t-\tau) + \omega_0^2 g(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

$$\frac{d^2 g(t-\tau)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dg(t-\tau)}{dt} + \omega_0^2 g(t-\tau) = \delta(t-\tau)$$

$$\frac{d^2[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{d[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt} + \omega_0^2\bar{f}(\tau)g(t-\tau) = \bar{f}(\tau)\delta(t-\tau)$$

$$\int_0^t \frac{d^2[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt^2}d\tau + \int_0^t 2\zeta\omega_0\frac{d[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt}d\tau + \int_0^t \omega_0^2\bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \bar{f}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$= \bar{f}(t) \text{ si } \tau < t$$

En permutant les intégrales et les dérivées et en notant $y(t) = \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau$ on obtient :

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \bar{f}(t)$$

qui est de l'équation initiale.

On peut donc choisir $y(t)$ comme solution particulière de l'équation initiale. La solution générale s'écrit donc :

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

✎ Démonstration 1.12 - Calcul de la fonction de Green

Soit $\boxed{\ddot{g}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t)}$ dont on prend la primitive

$$\dot{g}(t) + 2\zeta\omega_0 g(t) + \omega_0^2 \int g(t)dt = \int \delta(t)dt$$

$$\ddot{G}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \mathcal{H}(t)$$

avec $G(t) = \int g(t)dt$ la primitive de $g(t)$. Pour $t > 0$ l'équation s'écrit :

$$\boxed{\ddot{G}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = 1}$$

On a donc :

$$G(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + 1/\omega_0^2$$

$$\dot{G}(t) = g(t) = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\omega_d A\sin(\omega_d t) + \omega_d B\cos(\omega_d t)\right]$$

La condition $G(0) = 0$ (causalité) donne $\boxed{A = -1/\omega_0^2}$

La condition $g(0) = \dot{G}(0)$ donne $\boxed{B = -\zeta/(\omega_0\omega_d)}$

En reportant dans l'expression de $\dot{G}(t) = g(t)$ et en utilisant $\omega_0 = \omega_d/\sqrt{1-\zeta^2}$ on obtient finalement :

$$\boxed{g(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\frac{1}{\omega_d}\mathcal{H}(t)\sin[\omega_d t]}$$

✎ Démonstration 1.12 - Fin

En remarquant que $\int_0^t f(\tau)\mathcal{H}(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$ et en appliquant les règles usuelles de résolutions des équations différentielles du 2nd ordre on a bien si $\zeta < 1$:

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]$$

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\omega_d A\sin(\omega_d t) + \omega_d B\cos(\omega_d t)\right]$$

$$+ \frac{1}{m\omega_d}\frac{d}{dt}\left(e^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right)$$

avec $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

+ Conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0 \Rightarrow \boxed{A = u_0}$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \Rightarrow \dot{u}_0 = -\zeta\omega_0 A + \omega_d B \Rightarrow \boxed{B = \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}}$$ et on retrouve :

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]}$$

Plan du cours

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté
2.1 Introduction
2.2 Systèmes à deux degrés de liberté
2.3 Systèmes à *n* degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté
2.1 Introduction
2.2 Systèmes à deux degrés de liberté
2.3 Systèmes à *n* degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Introduction

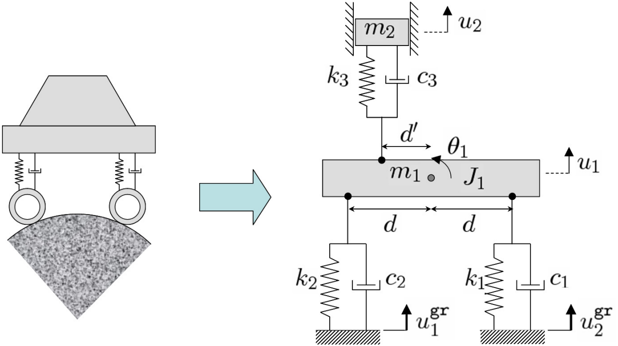


Figure 2.1- Exemple de système à 3 DDLs et modélisation équivalente.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

2.1 Introduction

2.2 Systèmes à deux degrés de liberté

2.3 Systèmes à n degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

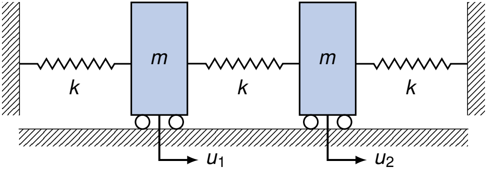


Figure 2.2- Exemple d'un système masses-ressorts à 2 DDLs.

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = 0 \end{cases}}$$

Puis sous forme matricielle :

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

avec : **M : matrice de masse** et **K : matrice de raideur**

✎ Démonstration 2.1

⇒ PFD sur la masse de gauche :

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 - k(u_1 - u_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0}$$

⇒ PFD sur la masse de droite :

$$m\ddot{u}_2 = -ku_2 - k(u_2 - u_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = 0}$$

Les équations du mouvement du système constitué des 2 masses couplées est :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = 0 \end{cases}$$

et donc sous forme matricielle cela donne :

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Définition et calcul des modes propres de vibration

- On cherche des solutions **particulières synchrones*** **(sinusoïdales) de même pulsation** Ω :

$$\boxed{\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{X}\cos(\Omega t)}$$

  Ces solutions sont les **modes de vibration** du système.

  * *tous les degrés de liberté sont régis par la même fonction du temps.*

- Forme de solution introduite dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\mathbf{KX} = \Omega^2\mathbf{MX}}$$

- Solutions non nulles uniquement si

$$\boxed{\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0}$$

✎ Remarque

Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Définition et calcul des modes propres de vibration

- Les **pulsations propres** et **vecteurs propres** sont :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \Omega_1^2 = \frac{3k}{m}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

  - **Mode 1 :** les masses oscillent **en phase à la pulsation Ω_1**
  - **Mode 2 :** les masses oscillent **en opposition de phase à la pulsation Ω_2**

- Solution générale (mouvement quelconque) = combinaison linéaire de ces deux modes :

$$\boxed{\mathbf{u} = \underbrace{\left(A_1 \cos(\Omega_1 t) + B_1 \sin(\Omega_1 t)\right)\mathbf{X}_1}_{\text{Mode 1}} + \underbrace{\left(A_2 \cos(\Omega_2 t) + B_2 \sin(\Omega_2 t)\right)\mathbf{X}_2}_{\text{Mode 2}}}$$

Les constantes A_1, B_1, A_2 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales $u_1(t=0)$, $\dot{u}_1(t=0)$, $u_2(t=0)$ et $\dot{u}_2(t=0)$ (4 équations pour 4 inconnues, ça marche !).

✎ Démonstration 2.2

Soit le problème aux valeurs propres :

$$\boxed{\mathbf{KX} = \Omega^2 \mathbf{MX}}$$

⇒ **Calcul des pulsations propres Ω**

Il faut résoudre $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}\right) = 0$, soit

$$\begin{vmatrix} 2k - \Omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \Omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(2k - \Omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$$

$$\left(2k - \Omega^2 m + k\right)\left(2k - \Omega^2 m - k\right) = 0$$

$$\left(3k - \Omega^2 m\right)\left(k - \Omega^2 m\right) = 0$$

Les pulsations propres sont donc :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega_2^2 = \frac{3k}{m}}$$

✎ Démonstration 2.2

⇒ Calcul des vecteurs propres X

Il y a 2 pulsations propres et donc 2 vecteurs propres

$$\mathbf{X}_1 = \{X_{11}, X_{12}\}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_2 = \{X_{21}, X_{22}\}^T$$

On commence par déterminer $\mathbf{X}_1$ pour cela il faut résoudre :

$$\left(\mathbf{K} - \Omega_1^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{X}_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \left(2k - \Omega_1^2 m\right) X_{11} - k X_{12} = 0 \\ -k X_{11} + \left(2k - \Omega_1^2 m\right) X_{12} = 0 \end{cases}$$

Comme $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}\right) = 0$, on peut résoudre avec une des 2 équations. On prend la 1ère :

$$\left(2k - \Omega_1^2 m\right) X_{11} - k X_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad k X_{11} - k X_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{11} = X_{12}}$$

⇒ Les masses oscillent **en phase**

On fait de même pour $\mathbf{X}_2$ et on trouve :

$$\left(2k - \Omega_2^2 m\right) X_{21} - k X_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k X_{21} - k X_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{21} = -X_{22}}$$

⇒ Les masses oscillent **en opposition de phase**

✎ Démonstration 2.2

Problème étant linéaire $\Rightarrow$ la solution générale (un mouvement quelconque des deux masses) s'exprime comme une combinaison linéaire des solutions associées à chaque mode (**principe de la décomposition modale**).

Il est cependant important de noter que pour un doublet $\{(\Omega_i, \mathbf{X}_i)\}_{i=1,2}$ si $\mathbf{X}_i \cos(\Omega_i t)$ est solution du problème couplé initial alors $\mathbf{X}_i \sin(\Omega_i t)$ l'est aussi.

On écrit donc finalement :

$$\boxed{\mathbf{u} = (A_1 \cos(\Omega_1 t) + B_1 \sin(\Omega_1 t))\, \mathbf{X}_1 + (A_2 \cos(\Omega_2 t) + B_2 \sin(\Omega_2 t))\, \mathbf{X}_2}$$

où les constantes A_1, B_1, A_2 et B_2 sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$u_1(t=0),\ \dot{u}_1(t=0),\ u_2(t=0) \text{ et } \dot{u}_2(t=0) \text{ (4 équations pour 4 inconnues, ça marche !).}$$

Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 1 : conditions initiales sur le mode 1

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$

- Le système s'écrit :

$$\begin{aligned}
u_1 &= A_1\cos(\Omega_1 t) + B_1\sin(\Omega_1 t) + A_2\cos(\Omega_2 t) + B_2\sin(\Omega_2 t)\\
u_2 &= A_1\cos(\Omega_1 t) + B_1\sin(\Omega_1 t) - A_2\cos(\Omega_2 t) - B_2\sin(\Omega_2 t)\\
\dot{u}_1 &= -\Omega_1 A_1\sin(\Omega_1 t) + \Omega_1 B_1\cos(\Omega_1 t) - \Omega_2 A_2\sin(\Omega_2 t) + \Omega_2 B_2\cos(\Omega_2 t)\\
\dot{u}_2 &= -\Omega_1 A_1\sin(\Omega_1 t) + \Omega_1 B_1\cos(\Omega_1 t) + \Omega_2 A_2\sin(\Omega_2 t) - \Omega_2 B_2\cos(\Omega_2 t)
\end{aligned}$$

- Application des conditions initiales :

$$\dot{u}_1(t=0)=0\ ;\ \dot{u}_2(t=0)=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c}\Omega_1 B_1+\Omega_2 B_2=0\\ \Omega_1 B_1-\Omega_2 B_2=0\end{array} \quad\Rightarrow\quad \boxed{B_1=B_2=0}$$

$$u_1(t=0)=1\ ;\ u_2(t=0)=1 \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c}A_1+A_2=1\\ A_1-A_2=1\end{array} \quad\Rightarrow\quad \boxed{A_2=0}\quad \boxed{A_1=1}$$

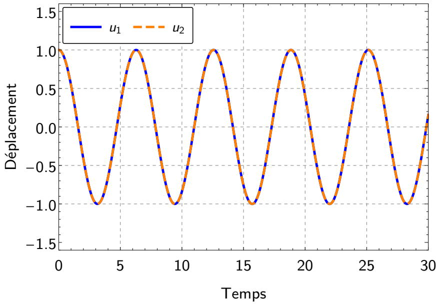
- Finalement, **seul un mouvement sur le mode 1 est observé** :

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \cos(\Omega_1 t)\\ u_2 &= \cos(\Omega_1 t)\end{aligned}}$$

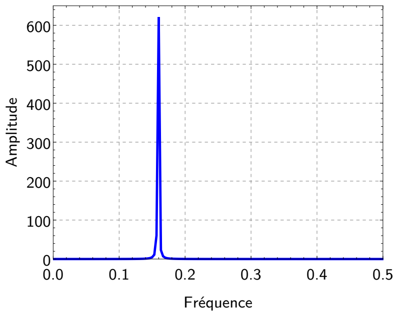
Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 1 : conditions initiales sur le mode 1

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



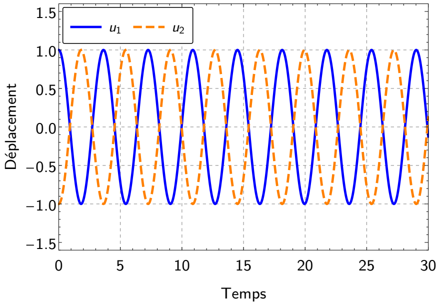
Périodogramme de u_1

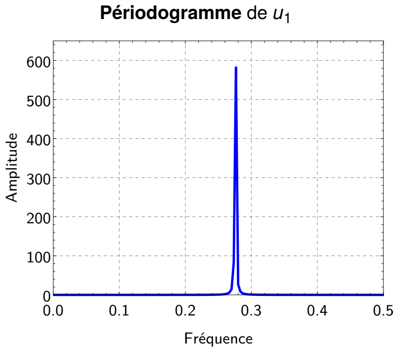


Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 2 : conditions initiales sur le mode 2

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=-1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$

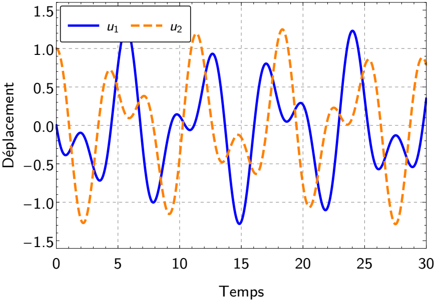




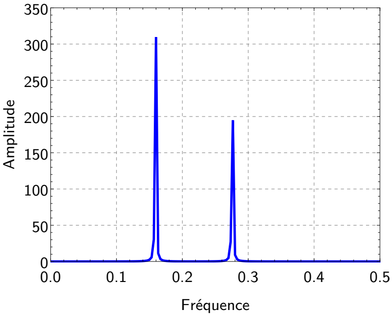
Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 3 : conditions initiales quelconques (exemple 1)

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=0}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=-1}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



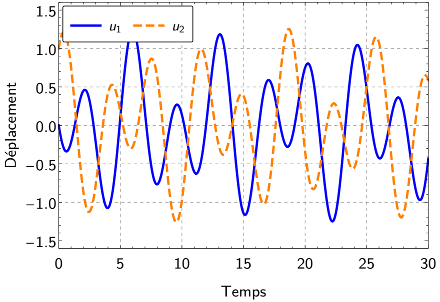
Périodogramme de u_1



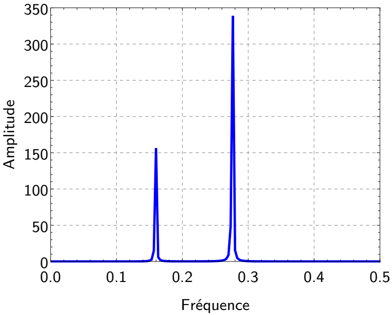
Exemple : cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 4 : conditions initiales quelconques (exemple 2)

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=0}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=-1}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=1}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



Périodogramme de u_1



Généralisation : cas des systèmes à 2 DDLs arbitraires

Équations du mouvement

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.}$$

Remarque : dans le cadre de ce cours les matrice de masse **M** et deux raideur **K** sont toutes les deux symétriques.

Pulsations et vecteurs propres

$$\boxed{\Omega_{1,2}^2 = \frac{M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11} \pm \sqrt{(M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11})^2 - 4M_{11}M_{22}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)}}{2M_{11}M_{22}}}$$

$$\boxed{\mathbf{X}_{1,2} = \begin{Bmatrix} (K_{22} - \Omega_{1,2}^2 M_{22})/(-K_{12}) \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

Généralisation : cas des systèmes à 2 DDLs arbitraires

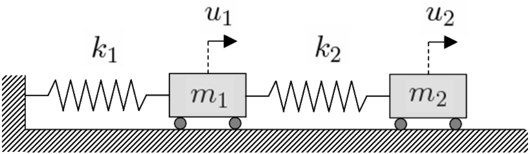


Figure 2.3- Autre exemple de système masses-ressorts à 2 DDLs.

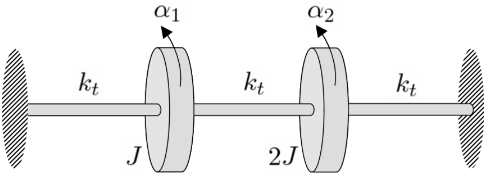
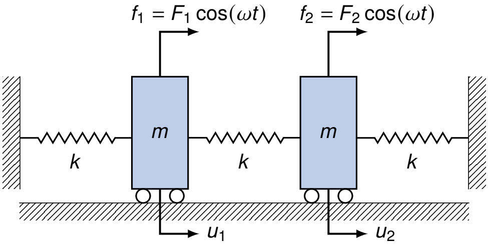


Figure 2.4- Autre exemple de système 2 DDLs, composé de disques rigides massifs et d'arbres de torsion sans masses.

Les exemples des Figures 2.3 et 2.4 sont traités en TD.

Réponse forcée harmonique

Exemple d'un système conservatif



Pulsations propres du système libre :

$$\boxed{\Omega_1 = \sqrt{k/m}} \text{ et } \boxed{\Omega_2 = \sqrt{3k/m}}$$

- Après calcul, on trouve pour les amplitudes U_1 et U_2 (réelles car pas d'amortissement) :

$$U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}$$

- Le dénominateur s'annule (**résonance**) pour les **pulsations de résonance** :

$$\boxed{\omega_1^{re} = \sqrt{k/m}} \text{ et } \boxed{\omega_2^{re} = \sqrt{3k/m}}$$

✎ Démonstration 2.3

- Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = F_1 \cos(\omega t) \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = F_1 \cos(\omega t) \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

- On cherche une solution stationnaire sous la forme : $\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t) = \mathbf{U}\cos(\omega t)$ que l'on introduit dans l'équation précédente. On obtient : $\mathbf{DU} = \mathbf{F}$ avec $\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}}$$

- On sait que $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}$, on a donc :

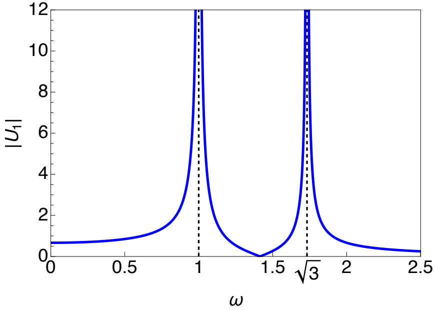
$$\boxed{U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}}$$

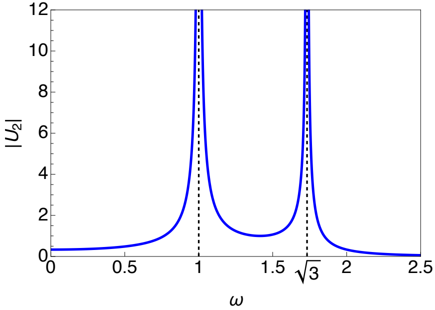
Réponse forcée harmonique

Exemple d'un système conservatif

$$\boxed{U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}}$$

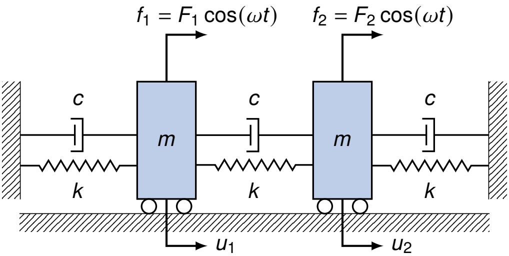
- **Paramètres :** $k = 1$, $m = 1$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 0,2$.
- **Pulsations propres :** $\boxed{\Omega_1 = \sqrt{k/m} = 1}$ et $\boxed{\Omega_2 = \sqrt{3k/m} = \sqrt{3}}$
- **Pulsations de résonance :** $\boxed{\omega_1^{re} = \sqrt{k/m} = 1}$ et $\boxed{\omega_2^{re} = \sqrt{3k/m} = \sqrt{3}}$





Réponse forcée harmonique

Cas d'un système amorti



- Cas conservatif : **résonance quand la pulsation de forçage est égale à une des pulsations propres du système libre**.
- Cas amorti : **résonance quand la pulsation de forçage est proche de l'une des pulsations propres du système libre**.

✎ Démonstration 2.4

- En formalisme complexe, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{\hat{u}}_1 + 2c\dot{\hat{u}}_1 - k\dot{\hat{u}}_2 + 2k\hat{u}_1 - k\hat{u}_2 = F_1 e^{j\omega t} \\ m\ddot{\hat{u}}_2 + 2c\dot{\hat{u}}_2 - c\dot{\hat{u}}_1 + 2k\hat{u}_2 - k\hat{u}_1 = F_1 e^{j\omega t} \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

- On cherche une solution stationnaire sous la forme : $\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}$ que l'on introduit dans l'équation précédente. On obtient : $\mathbf{DU} = \mathbf{F}$ avec $\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}}$$

- On sait que $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}$, on a donc :

$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{(2F_1 + F_2)\,k - F_1 m\omega^2 + jc\,(2F_1 + F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad \hat{U}_2 = \frac{(F_1 + 2F_2)\,k - F_2 m\omega^2 + jc\,(F_1 + 2F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

✎ Démonstration 2.4

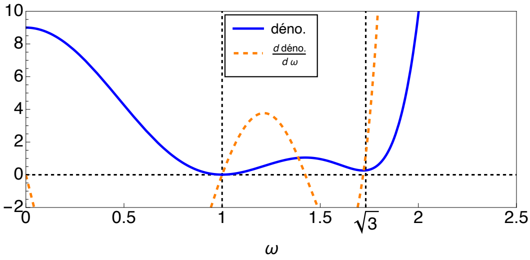
- Les amplitudes $|\hat{U}_1|$ et $|\hat{U}_2|$ sont :

$$|\hat{U}_1| = \frac{\sqrt{(2cF_1\omega + cF_2\omega)^2 + (2F_1k + F_2k - F_1m\omega^2)^2}}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}\sqrt{9c^2\omega^2 + (m\omega^2 - 3k)^2}}$$

et

$$|\hat{U}_2| = \frac{\sqrt{(cF_1\omega + 2cF_2\omega)^2 + (F_1k + 2F_2k - F_2m\omega^2)^2}}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}\sqrt{9c^2\omega^2 + (m\omega^2 - 3k)^2}}$$

- **Résonance = Min(dénominateur) de $|\hat{U}_1|$ et $|\hat{U}_2|$**

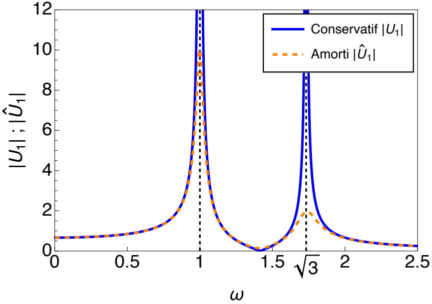


Pas de solutions analytiques simples des pulsations de résonance ici :

obtenues de façon approchée en Sect. 2.3 en utilisant la **décomposition modale**.

Réponse forcée harmonique

Cas d'un système amorti



Cas d'un amortissement faible

Dans ce cas on peut approximer les fréquences de résonance par la fréquences propres :

$$\boxed{\omega_i^{re} \approx \Omega_i} \qquad i = 1, 2 \text{ nombre de ddl, ici 2}$$

Réponse forcée harmonique

Cas général

Forme générale des équations du mouvement

De façon générale (avec de l'amortissement), on a :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t)}$$

- Matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

- Matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

- Matrice d'amortissement :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

- Vecteur force :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Réponse forcée harmonique
Cas général

- Équation du mouvement complexe :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

- La **solution stationnaire** (notée u) recherchée sous la forme suivante :

$$\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{array} \right\} e^{j\omega t}}$$

$\hat{U}_1$ et $\hat{U}_2$: amplitudes complexes des déplacements

- En injectant cette forme de solution dans les équations du mouvement, on obtient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2 M_{11} + j\omega C_{11} + K_{11} & j\omega C_{12} + K_{12} \\ j\omega C_{21} + K_{21} & -\omega^2 M_{22} + j\omega C_{22} + K_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \left\{ \begin{array}{c} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \right\}$$

- **Matrice de rigidité dynamique :**

$$\boxed{\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}}$$

Réponse forcée harmonique
Cas général

- Le système s'écrit :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}(-\omega^2 M_{11} + j\omega C_{11} + K_{11})U_1 + (j\omega C_{12} + K_{12})U_2 = F_1 \\ (j\omega C_{21} + K_{21})U_1 + (-\omega^2 M_{22} + j\omega C_{22} + K_{22})U_2 = F_2\end{array}\right.}$$

- Résolution par **inversion de D** :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c}\hat{U}_1 \\ \hat{U}_2\end{array}\right\} = \mathbf{D}^{-1}\left\{\begin{array}{c}F_1 \\ F_2\end{array}\right\}} \quad \boxed{\text{avec} \quad \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}}\begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11}\end{bmatrix}}$$

- Résolution par la **méthode de Cramer** :

$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} F_1 & D_{12} \\ F_2 & D_{22}\end{bmatrix}}{\det \mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \hat{U}_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} D_{11} & F_1 \\ D_{21} & F_2\end{bmatrix}}{\det \mathbf{D}}}$$

Résonance

Système avec de l'amortissement $\Rightarrow$ condition de résonance : $\boxed{|\det \mathbf{D}| = |\det \mathbf{D}|_{\text{min}}}$

Réponse forcée harmonique

Application 1 : cas d'une excitation par accélération imposée au support

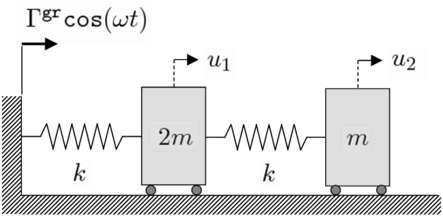


Figure 2.5- Système masses-ressorts excité par accélération imposée.

- Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} 2m\ddot{u}_1 + k(u_1 - u^{gr}) + k(u_1 - u_2) = 0 \\ m\ddot{u}_2 + k(u_2 - u_1) = 0 \end{cases}$$

- Les matrices de masse et de raideur s'expriment donc par

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Réponse forcée harmonique

Application 1 : cas d'une excitation par accélération imposée au support

- En posant $u_1^* = u_1 - u^{\text{gr}}$ et $u_2^* = u_2 - u^{\text{gr}}$, les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} 2m\ddot{u}_1 + 2ku_1^* - ku_2^* = -2m\ddot{u}^{\text{gr}} \\ m\ddot{u}_2 - ku_1^* + ku_2^* = -m\ddot{u}^{\text{gr}} \end{cases}$$

- Finalement, en posant $u_1^* = U_1^* \cos(\omega t)$ et $u_2^* = U_2^* \cos(\omega t)$, dans le référentiel du support en mouvement, l'équilibre dynamique du système se traduit par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2(2m) + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + k \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \Gamma^{\text{gr}} \\ \Gamma^{\text{gr}} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -2m\Gamma^{\text{gr}} \\ -m\Gamma^{\text{gr}} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

- On a donc $\mathbf{U}^* = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$, soit :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{Bmatrix} = -\frac{\Gamma^{\text{gr}}/\Omega_0^2}{2[1-(\omega/\Omega_0)^2]^2 - 1} \begin{Bmatrix} 3 - 2(\omega/\Omega_0)^2 \\ 4 - 2(\omega/\Omega_0)^2 \end{Bmatrix}}$$

Réponse forcée harmonique

Application 2 : absorbeur dynamique de vibration

cf. diaporama consacré

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

2.1 Introduction

2.2 Systèmes à deux degrés de liberté

2.3 Systèmes à n degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

Bibliographie

Modes de vibration – Généralisation

Les **vibrations libres d'un système conservatif** à n DDLs peuvent être appréhendées à partir du système matriciel suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}}$$

- **M** et **K** : matrices **(définies positives)** de masse et de raideur de taille $n \times n$
- **u** : vecteur des déplacements de taille $n \times 1$

Définition et calcul des modes propres de vibration

On cherche cette fois des solutions **particulières synchrones*** **de la forme générale :**

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{X}\phi(t)}$$

La substitution d'une solution de ce type dans l'équation du mouvement donne :

$$\ddot{\phi}(t)\mathbf{M}\mathbf{X} + \phi(t)\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{X} = -\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}\mathbf{M}\mathbf{X}$$

Les matrices **M** et **K** étant définies positives on a :

$$\boxed{-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \Omega^2 = \frac{\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X}} > 0.}$$

* *tous les degrés de liberté sont régis par la même fonction du temps.*

Modes de vibration – Généralisation

Deux cas sont à considérer à ce stade :

1. **Systèmes avec une configuration d'équilibre stable** $\boxed{\Omega^2 > 0}$ **:**

$$\boxed{\ddot{\phi}(t) + \Omega^2 \phi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{KX} - \Omega^2 \mathbf{MX} = \mathbf{0}}$$

qui admet une solution non nulle $\mathbf{X}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) telle que

$$\boxed{\mathbf{KX}_i - \Omega_i^2 \mathbf{MX}_i} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi_i(t) = A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)}$$

où Ω_i est l'une des n solutions de : $\boxed{\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}\right) = 0}$

2. **Systèmes admettant des modes de corps rigide** $\boxed{\mathbf{X}_r}$ **avec** $\boxed{\Omega_r = 0}$ **($r = 1, \ldots, n$) :**

$$\boxed{\ddot{\phi}_r(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_r(t) = At + B}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{KX}_r = \mathbf{0}}$$

Modes de vibration

Orthogonalité des modes de vibration

Lorsque toutes les pulsations propres $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont distinctes, les **propriétés d'orthogonalité** se résument à :

$$\boxed{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_s = 0 \quad \text{lorsque} \quad r \neq s}$$

Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires** $\{m_i\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\{k_i\}_{i=1,\ldots,n}$ définies par :

$$\boxed{m_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i \quad , \quad k_i = \mathbf{X}_i^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i}$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par

$$\boxed{\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}}$$

✎ Démonstration 2.5 – Orthogonalité des modes de vibration

Le problème aux valeurs propres est réécrit pour un mode donné $\{(\Omega_s, \mathbf{X}_s)\}$:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_s = \Omega_s^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_s$$

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K}\mathbf{X}_s = \Omega_s^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M}\mathbf{X}_s \quad \text{avec} \quad r \neq s \tag{2.1}$$

Même chose avec le mode $\{(\Omega_r, \mathbf{X}_r)\}$:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_r$$

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r \quad \text{avec} \quad r \neq s \tag{2.2}$$

On effectue $(2.1)^T - (2.2)$:

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}^T \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_s^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}^T \mathbf{X}_r - \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r$$

Les matrices $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ sont symétriques, donc $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ et $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ et donc :

$$\left(\Omega_r^2 - \Omega_s^2\right) \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r = 0$$

Comme $\boxed{\Omega_r \neq \Omega_s}$ on a alors $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r = 0}$

Comme $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r}$ on a aussi $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = 0}$

Modes de vibration

Définition

On appelle **modes de corps rigide** les solutions particulières du problème aux valeurs propres telles que $\boxed{\mathbf{KX} = \mathbf{0}}$, i.e. associées à des **valeurs propres nulles** $\Omega_i = 0$.

Le nombre maximum de modes de corps rigides est de 6 (3 translations + 3 rotations).

Normalisation des modes de vibration

Les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ sont définis à une constante près, on peut donc les **normaliser par rapport à la matrice de masse** :

$$\mathbf{Y}_i = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}} = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{m_i}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_i = 1}$$

Quand on considère les modes $\{(\Omega_i, \mathbf{Y}_i)\}_{i=1,\ldots,n}$ on a : $\boxed{m_i = 1}$ et $\boxed{\Omega_i = \sqrt{k_i}}$

Remarque

Dans la suite on suppose que les modes sont normalisés par rapport à la matrice de masse
$\Rightarrow$ Il seront quand même notés $\mathbf{X}_i$.

Principe de décomposition modale

Objectif de la décomposition modale

Principe de la décomposition modale $\equiv$ **1 problème à n DDLs** $\Longrightarrow$ **n problèmes à 1 DDL**

Orthogonalité des modes de vibration

Mise en œuvre

- Parce que les vecteurs propres $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1,\dots,n}$ sont **indépendants et orthogonaux par rapport aux matrices M et K** ils forment **une base de dimension n** permettant de représenter le comportement dynamique du système.

$\Rightarrow$ Le vecteur des déplacements **u** peut être exprimé sur la base des modes de vibrations. La **décomposition modale** s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbf{X}_i}$$

ϕ_i **: amplitudes modales** ou **coordonnées généralisées**, déterminées à partir des CIs.

Principe de décomposition modale

Remarque

Dans le cas de valeurs propres multiples (ceci inclues également les modes de corps rigide où la valeur propre correspondante est nulle) le principe de décomposition modale reste valable. Pour cela il faut faire appel au **théorème de dégénérescence**.

Théorème de dégénerescence ([Géradin et Rixen(1994)] page 73)

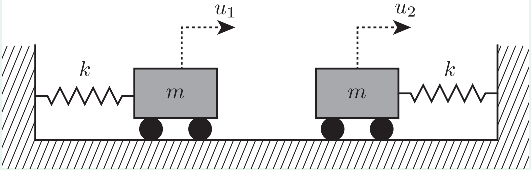
À une valeur propre Ω_p du système

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{X} = 0$$

correspond un nombre de vecteurs propres linéairement indépendants (orthogonaux les uns aux autres et orthogonaux aux vecteurs propres correspondant aux autres valeurs propres) égal à la multiplicité de la valeur propre.

Modes de vibration

Exemple de système dégénéré



$\Longrightarrow$ Calcul des pulsations propres Ω

Il faut résoudre $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0$, soit

$$\begin{vmatrix} k - \Omega^2 m & 0 \\ 0 & k - \Omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(k - \Omega^2 m\right)^2 = 0$$

Les pulsations propres sont donc :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}}$$

Principe de décomposition modale

Application au calcul des vibrations libres sans amortissement

- Système matricielle décrivant les vibrations libres d'un système conservatif à n DDLs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}}$$

$\mathbf{u}_0$ et $\dot{\mathbf{u}}_0$: vecteurs de taille $n \times 1$ exprimant les conditions initiales.

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad i = 1, \dots, n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases}}$$

- La solution de chacune des n équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\boxed{\phi_i = \phi_{i0}\cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i}\sin(\Omega_i t)}$$

✎ Démonstration 2.6 – Projection sur la base des vecteurs propres

On écrit les équations du mouvement en remplaçant **u** par sa décomposition modale :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = m_i = 1 \text{ si } r=i}} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = k_i = \Omega_i^2 \text{ si } r=i}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\phi}_i + \Omega_i^2\phi_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,n}$$

Pour les conditions initiales, si les modes sont normalisés par rapport à **M**, on a :

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{n}\phi_{i0}\mathbf{X}_i \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{n}\phi_{i0}\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \;\Leftrightarrow\; \boxed{\phi_{i0} = \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_{i0}\mathbf{X}_i \;\Leftrightarrow\; \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_{i0}\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \;\Leftrightarrow\; \boxed{\dot{\phi}_{i0} = \mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Équations du mouvement dans le cas dissipatif

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}}$$

Amortissement de Rayleigh

Matrice d'amortissement **proportionnelle à la matrice de masse et de rigidité** :

$$\boxed{\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}}$$

$\Longrightarrow$ Orthogonalité des formes propres $\mathbf{X}_i$ également vérifiée vis-à-vis de $\mathbf{C}$.

Remarque

Dans chacune des applications qui suivent les **décompositions modales sont effectuées sur les modes du système libre sans amortissement**.

Cas des systèmes dissipatifs

Application au calcul des vibrations libres avec amortissement

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i \Omega_i \dot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{array} \right.$$

ζ_i : **taux d'amortissements modaux**, définis tels que : $\boxed{\zeta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i\right)}$

- La solution de chacune des n équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\boxed{\phi_i = e^{-\zeta_i \Omega_i t}\left[\phi_{i0} \cos(\Omega_{id} t) + \frac{\zeta_i \Omega_{id} \phi_{i0} + \dot{\phi}_{i0}}{\Omega_{id}} \sin(\Omega_{id} t)\right] \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega_{id} = \Omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}}}$$

✎ Démonstration 2.7 – Projection sur la base des vecteurs propres

On doit résoudre, par décomposition modale, le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

$$\underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{X}_i}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = c_i \text{ si } r = i}} = a \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = 1 \text{ si } r = i}} + b \underbrace{\mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = \Omega_i^2 \text{ si } r = i}}$$

Le **coefficient d'amortissement modal** et le **taux d'amortissement modal** sont donc :

$$\boxed{c_i = a + b\Omega_i^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\zeta_i = \frac{c_i}{2\Omega_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i\right)}$$

✎ Démonstration 2.7 – Projection sur la base des vecteurs propres

Pour résoudre le problème on va décomposé le vecteur **u** sur **la base des modes propres du système homogène et sans amortissement associé** :

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =1 \text{ si } r=i}} + \dot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =c_i \text{ si } r=i}} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =\Omega_i^2 \text{ si } r=i}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\phi} + 2\zeta_i\Omega_i\dot{\phi} + \Omega_i^2\phi = 0$$

Les conditions initiales se traitent comme dans la Preuve 2.5. Finalement le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i\Omega_i\dot{\phi}_i + \Omega_i^2\phi_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases}}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Application au calcul des réponses forcées harmoniques

- Oscillations **forcées d'un système à n DDLs avec amortissements visqueux, soumis à des forces harmoniques**, décrites par les équations du mouvement suivantes :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

- La **solution stationnaire** recherchée sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}}$

  $\Rightarrow$ Le problème consiste alors à **identifier le vecteur des amplitudes complexes $\hat{\mathbf{U}}$**

- Décomposition modale $\Rightarrow$ $\hat{\mathbf{U}} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i$ + orthogonalité des formes propres $\mathbf{X}_i$:

$$\boxed{\phi_i = \frac{F_i/k_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad F_i = \mathbf{X}_i^T\mathbf{F} \qquad i = 1, \ldots, n}$$

  où les termes F_i sont appelés **forces modales**.

Remarque

Les amplitudes modales sont maintenant fonctions de la pulsation de forçage ω

✎ Démonstration 2.8

On doit résoudre, par décomposition modale, l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

On cherche une solution stationnaire sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}}$ qui est introduite dans l'équation du mouvement. Ce qui donne :

$$\boxed{\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F}}$$

Pour résoudre le problème on va décomposé le vecteur d'amplitudes complexes $\hat{\mathbf{U}}$ sur l**a base des modes propres du système homogène et sans amortissement associé** en posant :

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i}$$

✎ Démonstration 2.8

On obtient :

$$\left(-\omega^2\mathbf{M}+j\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(-\omega^2\mathbf{M}+j\omega\mathbf{C}+\mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_r^T\mathbf{F}$$

$$\sum_i^n\left(-\omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i+j\omega\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i+\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i\right)\phi_i=\mathbf{X}_r^T\mathbf{F}$$

$$\left(-\omega^2+c_ij\omega+\Omega_i^2\right)\phi_i=F_i$$

En divisant par Ω_i^2, le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\boxed{\phi_i=\frac{F_i/\Omega_i}{1-(\omega/\Omega_i)^2+2j\zeta_i\omega/\Omega_i}=\frac{F_i/k_i}{1-(\omega/\Omega_i)^2+2j\zeta_i\omega/\Omega_i}=U_i^{\mathrm{st}}A_{\omega,i}=U_i^{\mathrm{st}}\beta_ie^{-j\varphi_i}}$$

Finalement la réponse stationnaire s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{u}=\mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{u}}\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}\right]=\sum_i^n\mathrm{Re}\left[U_i^{\mathrm{st}}\beta_ie^{j(\omega t-\varphi_i)}\right]\mathbf{X}_i=\sum_i^n U_i^{\mathrm{st}}\beta_i\cos(\omega t-\varphi_i)\mathbf{X}_i}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Application au calcul des réponses forcées harmoniques

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}} = \sum_i^n \phi_i(\omega)\mathbf{X}_i = \sum_i^n \frac{F_i/k_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i}\mathbf{X}_i}$$

Hypothèse : au niveau de la résonance du i-ième mode on a $\hat{\mathbf{U}} \approx \phi_i(\omega)\mathbf{X}_i$

⇒ Expressions analytiques approchées :

- De la **pulsations de résonance** :

$$\omega_i^{re} = \Omega_i\sqrt{1 - 2\zeta_i^2} \qquad i = 1, \ldots, n$$

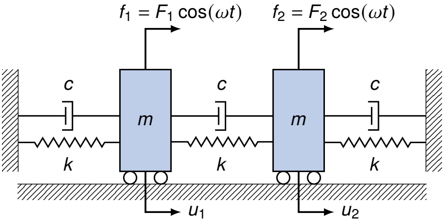
- Du maximums de l'**amplitude de chaque pic**. Pour la k-ième composante de $\hat{\mathbf{U}}$ on a :

$$|\hat{U}_k|_{\max} \approx |\phi_i(\omega_i^{re})X_{ik}| = \frac{F_i/k_i}{2\zeta_i\sqrt{1-\zeta_i^2}}|X_{ik}| \qquad k = 1, \ldots, n$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Réponse forcée harmonique

Cas d'un système amorti traité par décomposition modale



Pulsations propres :

$$\Omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \Omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

Vecteurs propres :

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

L'analyse modale conduit à :

$$k_i = \Omega_i^2, \quad c_1 = \frac{c}{m}, \quad c_2 = \frac{3c}{m}, \quad \zeta_i = \frac{1}{2}\frac{c_i}{\Omega_i}, \quad \phi_i = \frac{F_i/\Omega_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\,\omega/\Omega_i} \quad (i = 1, 2)$$

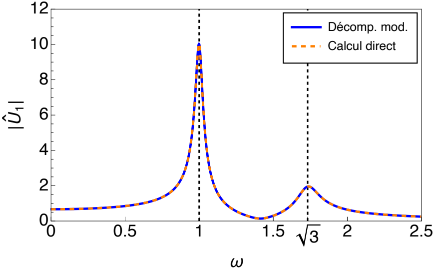
$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\phi_1 + \phi_2\right) = \frac{(2F_1 + F_2)\,k - F_1 m\omega^2 + jc\,(2F_1 + F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

$$\boxed{\hat{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(\phi_1 - \phi_2\right) = \frac{(F_1 + 2F_2)\,k - F_2 m\omega^2 + jc\,(F_1 + 2F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Réponse forcée harmonique

Cas d'un système amorti traité par décomposition modale

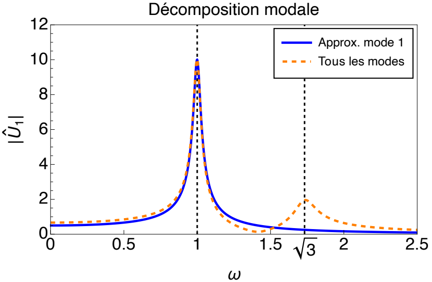


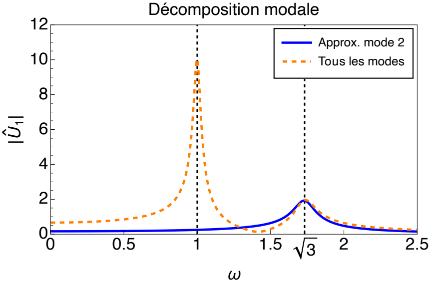
Approximation à la **résonance du mode 1** :

$$\hat{U}_1 \approx \frac{\phi_1}{\sqrt{2m}}, \quad \hat{U}_2 \approx \frac{\phi_1}{\sqrt{2m}}$$

Approximation à la **résonance du mode 2** :

$$\hat{U}_1 \approx \frac{\phi_2}{\sqrt{2m}}, \quad \hat{U}_2 \approx -\frac{\phi_2}{\sqrt{2m}}$$





Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Équations du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{gr}} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

où $\mathbf{K}_{IF}$ et $\mathbf{C}_{IF}$ représentent des matrices de raideur et d'amortissement, de taille $n \times n_f$ avec :

- n : nombre de DDLs internes ne comprenant pas les DDLs de frontières
- n_f : nombre de DDLs de frontière :

Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Équations du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{gr}} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

où $\mathbf{K}_{IF}$ et $\mathbf{C}_{IF}$ représentent des matrices de raideur et d'amortissement, de taille $n \times n_f$ avec :

- n : nombre de DDLs internes ne comprenant pas les DDLs de frontières
- n_f : nombre de DDLs de frontière :

Définition

On note $\mathbf{u}^{\mathrm{st}}$ le vecteur des **déplacements statiques** défini par

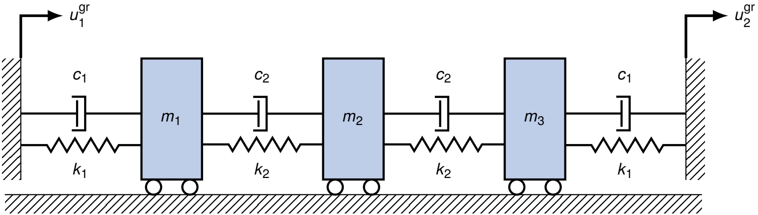
$$\boxed{\mathbf{u}^{\mathrm{st}} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

Le problème est traité en termes de **déplacement relatif** en considérant le vecteur $\mathbf{u}^{*}$:

$$\boxed{\mathbf{u}^{*} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{st}}}$$

✎ Démonstration 2.8

Soit le système suivant, à 5 DDLs dont 2 de frontière (i.e. $n = 3$ et $n_f = 2$) :



Les équations du mouvement, sous forme matricielle, sont :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & 2c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & 2k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^{gr} \\ \dot{u}_2^{gr} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{gr} \\ u_2^{gr} \end{Bmatrix}$$

ou encore

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}}$$

Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Proposition

Lorsque la matrice d'amortissement **C est proportionnelle à la matrice de raideur K** – c'est-à-dire lorsque $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$ – le vecteur $\mathbf{u}^*$ s'obtient par résolution du problème matriciel suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{\mathrm{st}}.}$$

où

$$\boxed{\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{st}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathbf{u}^{\mathrm{st}} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

✎ Démonstration 2.9

On s'intéresse au déplacement relatif :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{st} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^{st} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}$$

On reprend l'équation du mouvement avec $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= -\mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr} \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + b\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= -b\mathbf{K}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} - \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr} \\
&= -\mathbf{K}\left(b\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}\right) \\
&= \mathbf{K}\left(b\dot{\mathbf{u}}^{st} + \mathbf{u}^{st}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{st}\right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{st}\right) = \mathbf{0}$$

Au final, on obtient bien :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{st}}$$

Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Application au calcul des réponses forcées harmoniques

- Mouvement induit par des déplacements harmoniques $\boxed{\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{st}} = \hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}} e^{j\omega t}}$, imposés aux supports,
- Solution recherchée sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}}^{*} = \hat{\mathbf{U}}^{*} e^{j\omega t}}$.
- En appliquant le principe de décomposition, en posant :

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}}^{*} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i}$$

on obtient finalement les expression des amplitudes modales ϕ_i

$$\boxed{\phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \hat{U}_i^{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad \hat{U}_i^{\mathrm{st}} = \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}} \qquad i = 1, \ldots, n}$$

✎ Démonstration 2.10

En introduisant $\hat{\mathbf{u}}^{st} = \hat{\mathbf{U}}^{st} e^{j\omega t}$ et $\hat{\mathbf{u}}^* = \hat{\mathbf{U}}^* e^{j\omega t}$ dans $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{st}$ on obtient :

$$\boxed{\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\hat{\mathbf{U}}^* = \omega^2\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{st}}$$

Puis en introduisant $\hat{\mathbf{U}}^* = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i$ dans cette dernière on obtient :

$$\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i = \omega^2\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{st}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i = \omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{st}$$

$$\sum_i^n\left(-\omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i + j\omega\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i\right)\phi_i = \omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{st}$$

$$\left(-\omega^2 + 2j\omega\Omega_i + \Omega_i^2\right)\phi_i = \omega^2\hat{U}_i^{st}$$

En divisant par Ω_i^2, le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2\hat{U}_i^{st}}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad \hat{U}_i^{st} = \mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{st} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus

3.1 Introduction

3.2 Vibrations longitudinales des barres

3.3 Vibrations transversales des poutres

Bibliographie

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus
3.1 Introduction
3.2 Vibrations longitudinales des barres
3.3 Vibrations transversales des poutres

Bibliographie

Cadre du cours

Hypothèse de petites perturbations

Le cadre des petites perturbations sera admis tout au long de ce cours, dans ce sens que les hypothèses suivantes, appelées **hypothèses de petites perturbations (HPP)**, seront admises :

- Les **systèmes étudiés sont linéaires**, sous entendu que les déplacements engendrés par différentes sources d'excitation sont cumulables (**principe se superposition**).
- Les champs mécaniques et cinématiques des systèmes déformés sont étudiés par rapport à leurs **configurations de référence** (positions d'équilibre statique), sous entendu qu'il n'y a pas de distinction entre variables eulériennes et lagrangiennes ; cela signifie que les déplacements sont petits par rapport aux dimensions des systèmes étudiés ($\approx$ **pas de mouvement moyen**).

Vibrations des systèmes élastiques continus

- À « haute fréquence » l'approche masses-ressorts-amortisseurs n'est plus valide

  « haute fréquence » = Longueurs d'ondes deviennent du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques des sous-structures étudiées

⇒ Chaque sous-structure est considérée comme un système continu avec un comportement dynamique propre « multi-DDLs ».

⇒ La description de chaque sous-structure requiert de prendre en compte, à l'échelle locale, ses propriétés inertielles et élastiques. (**Mécanique des milieux continus**)

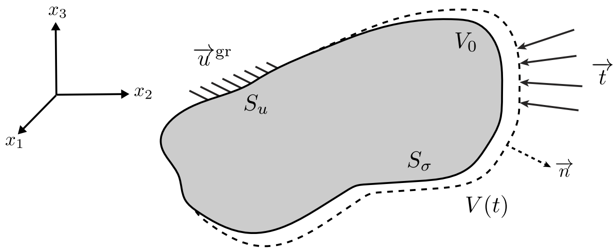


Figure 3.1- Illustration d'un domaine élastique V de surface $S = S_u + S_\sigma$.

Équations du mouvement (cf. [Géradin et Rixen(1994)])

Dans le cadre des petites perturbations (HPP), le **problème aux limites** permettant de décrire le comportement vibratoire du système s'exprime :

$$\textbf{PFD} \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\textbf{Condition aux limites} \qquad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ji} n_j = t_i \quad \text{sur } S_\sigma$$

$$u_i = u_i^{\text{gr}} \quad \text{sur } S_u$$

Ces équation traduisent respectivement les équations d'équilibre local du système (PFD), dans les trois directions de l'espace ($i = 1, 2, 3$), et les conditions aux limites.

Hypothèses MMC dans le cas des barres/poutres

- **Hypothèse de Navier :** les sections restent planes ;
- **Hypothèse de Bernoulli :** les sections restent perpendiculaires à la fibre neutre ;
- **Principe de St Venant :** les contraintes (et déformations) dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant (au centre de gravité de la section) associés à ce système de forces.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus
3.1 Introduction
3.2 Vibrations longitudinales des barres
3.3 Vibrations transversales des poutres

Bibliographie

Vibrations libres et modes de vibrations

Problème étudié

$\Rightarrow$ Vibrations libres d'une barre prismatique **droite, homogène et non amortie**.

- **Caractéristiques matérielles et géométriques :**
  densité ρ $[kg.m^{-3}]$, module d'Young E $[Pa]$, section S $[m^2]$, longueur L $[m]$.
- x ($x \in [0, L]$) : abscisse permettant de repérer un point (ou section) le long de la barre.

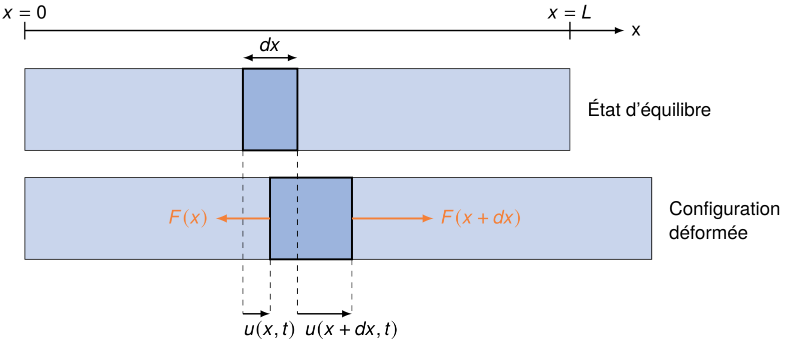


Figure 3.2- Illustration d'une barre en traction-compression et équilibre dynamique d'un tronçon de longueur élémentaire dx.

Vibrations libres et modes de vibrations

Équations du mouvement

A la position x, l'équation du mouvement du système s'exprime alors par :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[}$$

$u = u(t, x)$: **déplacement longitudinal de la section**.

Solutions stationnaires harmoniques

- On considère les solutions **particulières synchrones*** **(sinusoïdales) de même pulsation Ω** du problème en posant $\boxed{u(x,t) = X(x)\cos(\Omega t)}$ **(solution à variables séparées)**
- Équation à résoudre : $\boxed{\frac{d^2X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \beta = \Omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}}$

  β : **nombre d'onde** et $\lambda = 2\pi/\beta$: **longueur d'onde**
- Solution : $\boxed{X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \qquad x \in [0, L]}$

  A et B : constantes déterminées à partir des **conditions aux limites** et par **nomalisation**.

✎ Démonstration 3.1

Le PFD est écrit pour l'élément de barre :

$$dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x+dx) - F(x)$$

$$\rho Sdx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x) + F'(x)dx - F(x)$$

En écrivant $\boxed{F = \sigma S}$ et en utilisant la loi de Hooke $\boxed{\sigma = E\epsilon}$ avec $\boxed{\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}}$ dans le cas d'une **traction pure** (cf. cours MMC 3A GSI, INSA CVL), on a :

$$\rho Sdx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

et donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[}$$

Remarque

Les valeurs de $u(x,t)$ en $x = 0$ et $x = L$ sont imposées par les conditions aux limites.

✎ Démonstration 3.1

On cherche les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation Ω) du problème en posant $\boxed{u(x,t) = X(x)\cos(\Omega t)}$ qui est introduit dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2}\cos(\Omega t) + \frac{\rho}{E}\Omega^2 X\cos(\Omega t) = 0$$

et donc

$$\boxed{\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \beta = \Omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}}$$

L'équation précédent est celle d'un oscillateur harmonique spatial, le nombre nombre d'onde β est la « pulsation spatiale ». La solution est donc de la forme :

$$\boxed{X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \qquad x \in [0, L]}$$

Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont définies en considérant les 2 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion :

- le déplacement longitudinal : $\boxed{u(x,t)}$;
- la contrainte longitudinale : $\boxed{\sigma = E\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}}$

Définition

Une **condition aux limites homogène** consiste à annuler l'une de ses grandeurs.

Barre libre-libre

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0}$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$\boxed{X_i = A\cos(\beta_i x) \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \qquad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \qquad i \geq 0}$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\boxed{\Omega_i = \frac{i\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad i \geq 0}$$

Remarque

Dans ce cas, la solution obtenue lorsque $i = 0$ (c'est-à-dire pour $\Omega_0 = 0$ et $X_0 = A$) correspond au *mode de corps rigide* (translation selon x) du système.

✎ Démonstration 3.2 - Barre libre-libre

Si la barre est **libre** en l'une de ses extrémités c'est que cette dernière **ne subit aucune contrainte**. Comme la loi de Hooke pour une barre en traction s'écrit :

$$\boxed{\sigma = E\epsilon = E\frac{\partial u}{\partial x} = E\frac{dX}{dx}\cos(\Omega t)}$$

on a donc pour une **barre libre-libre** :

$$\boxed{\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0}$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\sin(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = i\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_i = i\frac{\pi}{L}} \text{ et } \boxed{\Omega_i = i\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \ (i \geq 0)$$

et donc finalement :

$$\boxed{u(x,t) = A\cos(\beta_i x)\cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 0}$$

À chaque position x le déplacement u oscille à la pulsation Ω_i avec une amplitude $A\cos(\beta_i x)$

Barre libre-libre
Déformées modales

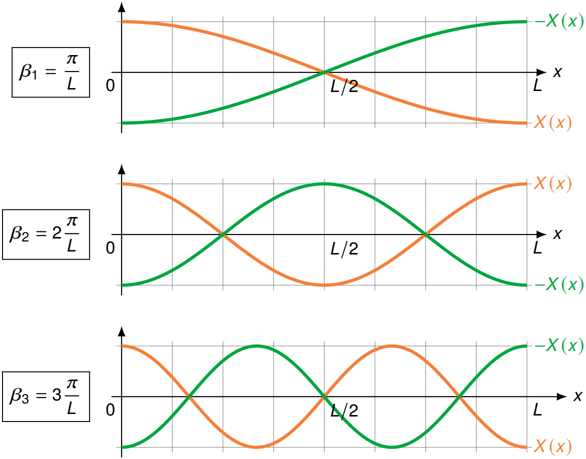


Figure 3.3- Évolution spatiale des déformées modales $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ pour une barre libre-libre.

Barre encastrée-libre

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0}$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$\boxed{X_i = B\sin(\beta_i x) \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \qquad \beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \qquad i \geq 1}$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\boxed{\Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad i \geq 1}$$

✎ Démonstration 3.2 - Barre encastrée-libre

Si la barre est **encastrée** en l'une de ses extrémités c'est que cette dernière **ne subit aucune déplacement**. On a donc pour une **barre encastrée-libre** :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0}$$

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

$$\left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad B\cos(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = \tfrac{(2i-1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L}} \text{ et } \boxed{\Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (i \geq 1)$$

et donc finalement :

$$\boxed{u(x,t) = B\sin(\beta_i x)\cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 1}$$

À chaque position x le déplacement u oscille à la pulsation Ω_i avec une amplitude $B\sin(\beta_i x)$

Barre encastrée-libre

Déformées modales

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\pi}{2L}}$$

$$\boxed{\beta_2 = \frac{3\pi}{2L}}$$

$$\boxed{\beta_3 = \frac{5\pi}{2L}}$$

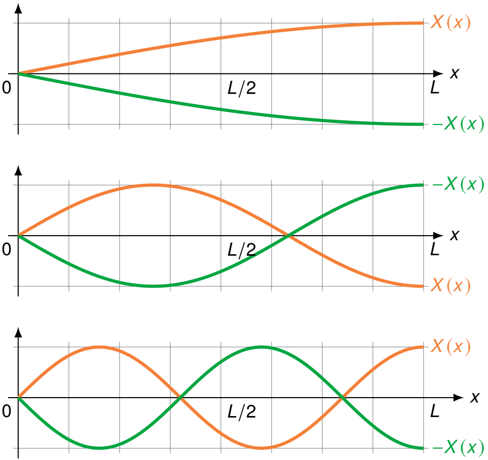


Figure 3.4- Évolution spatiale des déformées modales $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ pour une barre encastrée-libre.

Barre encastrée-encastrée

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X|_{x=L} = 0}$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$\boxed{X_i = B\sin(\beta_i x) \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \qquad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \qquad i \geq 1}$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\boxed{\Omega_i = \frac{i\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad i \geq 1}$$

✎ Démonstration 3.2 - Barre encastrée-encastrée

On a donc pour une **barre encastrée-encastrée** :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X|_{x=L} = 0}$$

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$

$$X|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = i\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_i = i\frac{\pi}{L}} \text{ et } \boxed{\Omega_i = i\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}} \ (i \geq 0)$$

et donc finalement :

$$\boxed{u(x,t) = B\sin(\beta_i x)\cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 0}$$

À chaque position x le déplacement u oscille à la pulsation Ω_i avec une amplitude $B\sin(\beta_i x)$

Barre encastrée-encastrée
Déformées modales

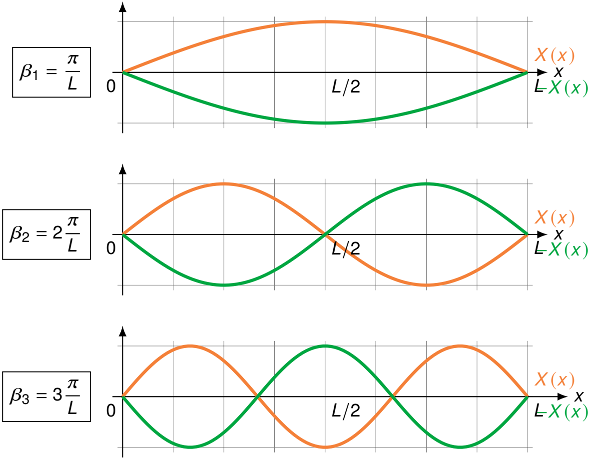


Figure 3.5- Évolution spatiale des déformées modales $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ pour une barre encastrée-encastrée.

Modes de vibrations

Déinition

$\Rightarrow$ Les doublets $\boxed{\{(\Omega_i, X_i)\}_{i\geq 1}}$ sont appelés **modes de vibrations**.

- Dans le cadre des vibrations longitudinales, on parlera de **modes de traction-compression**, **leur nature dépend du type de conditions aux limites envisagées**.
- Chaque mode i est caractérisé par une **pulsation propre** Ω_i et une **forme propre** $X_i = X_i(x)$, fonction de la position sur l'axe de la barre.
  $\Rightarrow$ Les formes propres sont définies à une constante près.

Remarque

La famille des vecteurs propres $\{\{X\}_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ forme **une base de dimension** ∞ permettant de représenter le comportement dynamique du système.

Modes de vibrations

Orthogonalité des modes de vibration

Deux modes donnés (Ω_r, X_r) et (Ω_s, X_s), pour lesquels $\Omega_r \neq \Omega_s$, vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\boxed{\int_0^L X_r X_s \, dx = 0 \quad , \quad \int_0^L \frac{dX_r}{dx}\frac{dX_s}{dx} \, dx = 0 \qquad \text{lorsque} \quad r \neq s}$$

Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires** m_i et k_i définies par :

$$\boxed{m_i = \rho S \int_0^L X_i^2 \, dx \quad , \quad k_i = ES \int_0^L \left(\frac{dX_i}{dx}\right)^2 dx \qquad \forall i \geq 1}$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par $\boxed{\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}}$

✎ Démonstration 3.3 – Orthogonalité des modes de vibration

L'équation des formes propres est écrite pour deux modes différents X_r et X_s

$$\frac{d^2X_r}{dx^2}+\beta_r^2X_r=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2X_s}{dx^2}+\beta_s^2X_s=0 \quad \text{avec} \quad r\neq s \tag{3.4}$$

On effectue $\int_0^L X_s(3.3)dx$:

$$\int_0^L\left(X_s\frac{d^2X_r}{dx^2}+\beta_r^2X_sX_r\right)dx=0$$

$$\underbrace{\left[X_s\frac{dX_r}{dx}\right]_0^L}_{=0\text{ (car C.I. homogènes)}}-\int_0^L\frac{dX_s}{dx}\frac{dX_r}{dx}dx+\int_0^L\beta_r^2X_sX_rdx=0 \tag{3.5}$$

puis $\int_0^L X_r(3.4)dx$:

$$\int_0^L\left(X_r\frac{d^2X_s}{dx^2}+\beta_s^2X_sX_r\right)dx=0$$

$$\underbrace{\left[X_r\frac{dX_s}{dx}\right]_0^L}_{=0\text{ (car C.I. homogènes)}}-\int_0^L\frac{dX_r}{dx}\frac{dX_s}{dx}dx+\int_0^L\beta_s^2X_rX_sdx=0 \tag{3.6}$$

✎ Démonstration 3.3 – Orthogonalité des modes de vibration

En faisant (3.5)-(3.6), on obtient :

$$\boxed{\left(\beta_r^2 - \beta_s^2\right) \int_0^L X_r X_s dx = 0}$$

Donc comme $r \neq s$ on a :

$$\boxed{\int_0^L X_r X_s dx = 0} \tag{3.7}$$

En introduisant (3.7) dans (3.5) (ou (3.6)), on a également :

$$\boxed{\int_0^L \frac{dX_r}{dx} \frac{dX_s}{dx} dxdx = 0}$$

Modes de vibrations

Normalisation des modes de vibration

Les vecteurs propres X_i sont définis à une constante près, on peut donc les **normaliser par rapport aux masses modales** :

$$Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{\rho S \int_0^L X_i^2 \, dx}} = \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_i = 1}$$

Quand on considère les modes $\{(\Omega_i, Y_i)\}_{i=1,\ldots,\infty}$ on a : $\boxed{m_i = 1}$ et $\boxed{\Omega_i = \sqrt{k_i}}$

Remarque

Dans la suite on suppose que les modes sont **normalisés par rapport à la masse**

Prise en compte de l'amortissement

Deux types d'amortissement :

- Amortissement structural dû à la nature **viscoélastique** du matériau.

  $\Rightarrow$ Viscoélasticité linéaire, **modèle de Kelvin** : $\boxed{\sigma = E\epsilon + \mu\dot{\epsilon} = E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}$

- Amortissement dû aux forces (linéiques) de frottement externes $\boxed{\propto \frac{\partial u}{\partial t}}$

Nouvelle écriture du PFD sur l'élément de barre

Le PFD sur l'élément de barre s'écrit maintenant :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)}_{\sigma} dx - \nu dx\frac{\partial u}{\partial t}$$

et donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E}\frac{\partial u^3}{\partial x^2\partial t} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad x \in]0, L[}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

On considère le problème de vibrations d'une barre sollicitée ponctuellement, sur l'une de ses extrémités, par force ou déplacement imposés.

⇒ Les **excitations sont supposés harmoniques** de pulsation ω, s'appliquant selon la direction longitudinale x.

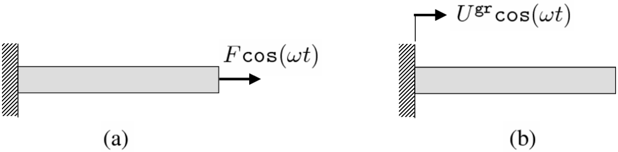


Figure 3.4- Vibrations forcées harmoniques d'une barre (traction-compression) : (a) excitation par force imposée ; (b) excitation par déplacement imposé.

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

- La **réponse stationnaire** s'obtient par considération d'une solution particulière $\boxed{u(x,t) = U(x)e^{j\omega t}}$ de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E}\frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE}\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad x \in]0, L[$$

- On montre que l'amplitude complexe U est décrite par l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{d^2 U}{dx^2} + {\gamma^*}^2 U = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \gamma^* = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E^*}}}$$

  Les phénomènes de dissipation étant pris en compte à partir d'un **mode de Young complexe** $E^* = E(1 + j\eta)$ où η est appelé **facteur de perte**. Dans ce cas la contrainte σ est reliée à la déformation axiale ϵ par $\boxed{\sigma = E(1 + j\eta)\epsilon}$.

- L'amplitude complexe U s'exprime alors par

$$\boxed{U = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x} \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \quad \gamma^* = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E^*}}}$$

  où γ^* est le **nombre d'onde complexe**, **défini par rapport à la pulsation d'excitation**.

✎ Démonstration 3.4

L'introduction de $u(x,t) = U(x)e^{j\omega t}$ dans

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E}\frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE}\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

conduit à

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{dx^2} + j\omega\frac{\mu}{E}\frac{d^2U}{dx^2} + \omega^2\frac{\rho}{E}U - j\omega\frac{\nu}{SE}U &= 0\\ \left(1 - j\omega\frac{\mu}{E}\right)\frac{d^2U}{dx^2} + \left(\omega^2\frac{\rho}{E} - j\omega\frac{\nu}{SE}\right)U &= 0\\ \frac{d^2U}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2\rho - j\omega\nu/S}{E + j\omega\mu}\right)U &= 0\end{aligned}$$

Si on néglige l'amortissement dû aux forces de frottement externes (i.e. $\nu = 0$) on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2U}{dx^2} + {\gamma^*}^2 U = 0 \qquad x \in]0, L[}$$

avec le nombre d'onde complexe

$$\boxed{\gamma^* = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E + j\omega\mu}} = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E(1 + j\eta)}}} \quad \text{où} \quad \boxed{\eta = \frac{\omega\mu}{E}}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

La solution stationnaire s'exprime à partir de 2 constantes A et B, obtenues par application des **conditions aux limites** qui contiennent le forçage :

Barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$

Conditions aux limites : $\boxed{U|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad E^*S \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} = F}$

L'amplitude complexe U s'écrit alors :

$$\boxed{U = \frac{F}{j\gamma^* E^* S} \frac{-e^{-j\gamma^* x} + e^{j\gamma^* x}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \qquad x \in [0, L]}$$

Barre excitée par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$

Conditions aux limites : $\boxed{U|_{x=0} = U^{\mathrm{gr}} \quad \text{et} \quad S\sigma|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} = 0}$

L'amplitude complexe U s'écrit alors :

$$\boxed{U = U^{\mathrm{gr}} \frac{e^{-j\gamma^* (x-L)} + e^{j\gamma^* (x-L)}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \qquad x \in [0, L]}$$

✎ Démonstration 3.5 - Barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$

Si la barre est **excité par une force harmonique** $Fe^{j\omega t}$ en $x = L$ on a alors :

$$Fe^{j\omega t} = S\ \sigma|_{x=L} = S(E\epsilon + \mu\dot{\epsilon})|_{x=L} = S(E\epsilon + j\omega\mu)\,\epsilon|_{x=L} = E^*S\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = E^*S\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} e^{j\omega t}$$

Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\boxed{U|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad E^*S\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} = F}$$

d'où, comme $U(x) = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x}$, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{F}{E^*S} \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{F}{E^*S} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = -A = \frac{F}{j\gamma^* E^* S}\,\frac{1}{e^{-j\gamma^* L} + j\gamma^* e^{j\gamma^* L}}}$$

et donc finalement :

$$\boxed{U = \frac{F}{j\gamma^* E^* S}\,\frac{-e^{-j\gamma^* x} + e^{j\gamma^* x}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \qquad x \in [0, L]}$$

✎ Démonstration 3.5 - Barre excitée par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$

Si la barre est **excité par un déplacement harmonique $U^{\text{gr}} e^{j\omega t}$** en $x = 0$ on a alors :

$$u|_{x=0} = U|_{x=0}\, e^{j\omega t} = U^{\text{gr}} e^{j\omega t}$$

Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$\boxed{U|_{x=0} = U^{\text{gr}} \quad \text{et} \quad S\sigma|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L} = 0}$$

d'où, comme $U(x) = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x}$, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^{\text{gr}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U^{\text{gr}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{U^{\text{gr}} e^{j\gamma^* L}}{e^{-j\gamma^* L} + j\gamma^* B e^{j\gamma^* L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{U^{\text{gr}} e^{-j\gamma^* L}}{e^{-j\gamma^* L} + j\gamma^* B e^{j\gamma^* L}}}$$

et donc finalement :

$$\boxed{U = U^{\text{gr}} \frac{e^{-j\gamma^* (x-L)} + e^{j\gamma^* (x-L)}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \qquad x \in [0, L]}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

Phénomène de résonance

Si il n'y a pas d'amortissement :

- **Barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$, on a en $x = L$**

$$\boxed{U(x = L) = \frac{F}{j\gamma ES}\frac{-e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}}{e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}} = \frac{F}{\gamma ES}\tan(\gamma L)}$$

donc $U(x = L) \to \infty$ (résonance) si $\boxed{\gamma = \frac{(2i-1)\pi}{2L}}$ et $\boxed{\omega = \frac{(2i-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$ $(i \geq 1)$

$\Rightarrow$ **Résonance quand $\boxed{\omega = \Omega_i}$ des modes de la barre encastré-libre**

- **Barre excitée par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$, on a en $x = L$**

$$\boxed{U(x = L) = U^{\mathrm{gr}}\frac{2}{e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}} = U^{\mathrm{gr}}\frac{1}{\cos(\gamma L)}}$$

$\Rightarrow$ **Résonance quand $\boxed{\omega = \Omega_i}$ des modes de la barre encastré-libre**

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

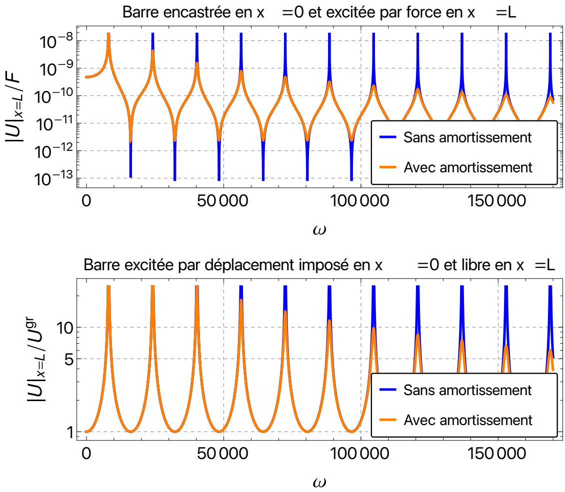


Figure 3.5- Évolution fréquentielle du déplacement longitudinal (amplitude) d'une barre encastrée en $x = 0$ et excitée (en haut) par force harmonique en $x = L$ et (en bas) par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$. Réponse au point d'excitation.

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

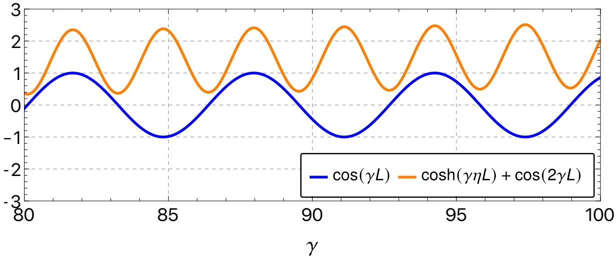
Remarque sur le modèle d'amortissement

$$\text{si } 0 < \eta \ll 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\gamma^* = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E(1+j\eta)}} \approx \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} - j\frac{1}{2}\eta\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}} = \gamma - j\frac{1}{2}\eta\gamma}$$

- Le bruit n'affecte que la partie réelle de nombre d'onde

$\Rightarrow$ Le décalage des fréquences de résonance est très faible par rapport au cas conservatif

Preuve graphique : $|\tan(\gamma^* L)| = \left|\tan\left((\gamma - j\frac{1}{2}\eta\gamma)L\right)\right| = \dfrac{\sqrt{\text{sh}^2(\gamma\eta L) + \sin^2(2\gamma L)}}{\text{ch}(\gamma\eta L) + \cos(2\gamma L)}$



Principe de décomposition modale

Proposition

Les formes propres $\{X_i\}_{i\geq 0}$ constituent une base de représentation pour décrire le comportement dynamique du système (possiblement forcé). La décomposition modale se traduit par

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x)}$$

$\phi_i = \phi_i(t)$: **amplitudes modales**.

Principe de troncature modale

En pratique, seuls *n* **modes** $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ **sont retenus pour décrire la décomposition modale**. C'est le **principe de troncature modale**. La décomposition s'écrit alors :

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) X_i(x)}$$

Principe de décomposition modale

Cas des vibrations libres non amorties

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad \forall i \geq 1 \\ \phi_i|_{t=0} = \phi_{i0} = \rho S \displaystyle\int_0^L X_i u_0 \, dx \quad , \quad \left.\dfrac{d\phi}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\phi}_{i0} = \rho S \displaystyle\int_0^L X_i \dot{u}_0 \, dx \end{cases}}$$

- La solution de chacune des équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\boxed{\phi_i = \phi_{i0}\cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i}\sin(\Omega_i t)}$$

✎ Démonstration 3.6

On suppose un décomposition modale de type $u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x)$ qui est introduite dans l'équation du mouvement sans amortissement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\int_0^L X_r \left(\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{d^2 X_i}{dx^2} - \frac{\rho}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\int_0^L X_r \left(\sum_{i=1}^{\infty} -\phi_i \beta_i^2 X_i - \frac{\rho}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} -\phi_i \frac{\beta_i^2}{\rho S} \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i}} - \frac{1}{SE} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i}} = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, les définition des masses et raideurs modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse ($m_i = 1$), on obtient :

$$\boxed{-\frac{\beta_i^2}{\rho S}\phi_i - \frac{1}{SE}\frac{d^2\phi_i}{dt^2} = 0}$$

✎ Démonstration 3.6

Comme $\boxed{\beta_i^2 = \frac{\Omega_i^2 \rho}{E}}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad \forall i \geq 1}$$

Il faut aussi projeter les conditions initiales $u(x, 0) = u_0$ dans la base des modes propres :

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i$$

$$\rho S \int_0^L X_r u_0 dx = \rho S \int_0^L X_r \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i dx$$

$$\rho S \int_0^L X_r u_0 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} \rho S \int_0^L X_r X_i dx$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\boxed{\phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i u_0 \, dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{u}_0 \, dx}$$

Principe de décomposition modale

Prise en compte d'une excitation aux extrémités de la barre

Objectif

Approximer les résultats obtenus précédemment à l'aide d'une décomposition modale tronquée

En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que :

$$\boxed{\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = f_0 X_i(0) + f_L X_i(L) \qquad \forall i \geq 1}$$

f_0 et f_L : forces appliquées au système en $x = 0$ et $x = L$

Remarque

Les modes utilisées sont choisis pour être **« compatibles avec le forçage considéré »**

✎ Démonstration 3.7

Formulation faible du problème *(cf. cours d'éléments finis, J.-M. Mencik)* :

$$\int_0^L h(x)\left(\rho S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu S\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)dx = 0$$

avec $h(x)$ une fonction définie sur $[0, L]$. Une intégration par partie des deux derniers termes donne :

$$\rho S\int_0^L h(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx - \mu S\left[h(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]_0^L + \mu S\int_0^L \frac{dh(x)}{dx}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}dx - ES\left[h(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + ES\int_0^L \frac{dh(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}dx = 0$$

On pose $\boxed{u(x,t) = \sum_r \phi_r(t)X_r(x)}$ et $\boxed{h(x) = X_i(x)}$ ce qui donne :

$$\rho S\int_0^L X_i(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_r \phi_r X_r\right)dx - \mu S\left[X_i(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right]_0^L + \mu S\int_0^L \frac{dX_i(x)}{dx}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\sum_r \phi_r X_r\right)dx - ES\left[X_i(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L + ES\int_0^L \frac{dX_i(x)}{dx}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_r \phi_r X_r\right)dx = 0$$

✎ Démonstration 3.7

Donc, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes (cf. diapositive 127), on obtient

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = \mu S\left[X_i(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]_0^L + ES\left[X_i(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L =$$
$$X_i(L)S\left(E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} + \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|_{x=L}\right) - X_i(0)S\left(E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|_{x=0}\right)$$

Selon le **modèle de Kelvin** on a également (cf. diapositive 131) $\boxed{\sigma = E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}}$ donc

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = \mu S\left[X_i(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]_0^L + ES\left[X_i(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^L =$$
$$X_i(L)\underbrace{S\left(E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} + \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|_{x=L}\right)}_{\sigma S = f_L} - X_i(0)\underbrace{S\left(E\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + \mu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right|_{x=0}\right)}_{\sigma S = -f_0 \text{ (convention)}}$$

Et donc finalement

$$\boxed{\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = f_0X_i(0) + f_LX_i(L) \qquad \forall i \geq 1}$$

Principe de décomposition modale

Cas d'une excitation par force imposée

Système : barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force $F\cos(\omega t)$ en $x = L$

- L'équation précédente s'écrit : $\boxed{\dfrac{d^2\phi_i}{dt^2} + \dfrac{\mu}{E}\Omega_i^2\dfrac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = F\cos(\omega t)X_i(L) \quad \forall i \geq 1}$
- On suppose une réponse oscillant à la pulsation de forçage $u(x,t) = U(x)e^{j\omega t}$. Dans ce cas en posant $\phi_i = \Phi_i e^{j\omega t}$ la décomposition modale s'écrit :

$$\boxed{U(x,\omega) = \sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\omega)X_i(x).}$$

- Comme précédemment, les phénomènes de dissipation sont pris en compte à partir d'un facteur de perte η. L'équation précédente s'écrit :

$$\boxed{-\omega^2\Phi_i + \Omega_i^2(1+j\eta)\Phi_i = FX_i(L) \qquad \forall i \geq 1.}$$

- Les modes de barre encastrée-libre sont utilisée, on obtient donc :

$$\boxed{\Phi_i = \frac{(F/\Omega_i^2)X_i(L)}{(1+j\eta)-(\omega/\Omega_i)^2} = \frac{(F/\Omega_i^2)\sin[(2i-1)\pi/2]}{(1+j\eta)-(\omega/\Omega_i)^2} \qquad \forall i \geq 1}$$

✎ Démonstration 3.8

Passage en complexe (on étudie $\hat{\phi}_i$ avec $\phi_i = \mathrm{Re}[\hat{\phi}_i]$ et on omet les ^) :

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = F\cos(\omega t)X_i(L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2\frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2\phi_i = Fe^{j\omega t}X_i(L)}$$

On suppose $\phi_i = \Phi_i e^{j\omega t}$ et donc :

$$\boxed{-\omega^2\Phi_i + j\omega\frac{\mu}{E}\Omega_i\Phi_i + \Omega_i^2\Phi_i = FX_i(L)}$$

Comme $\eta = \frac{\omega\mu}{E}$, on a bien :

$$\boxed{-\omega^2\Phi_i + \Omega_i^2(1 + j\eta)\Phi_i = FX_i(L) \qquad \forall i \geq 1.}$$

Principe de décomposition modale

Cas d'une excitation par force imposée

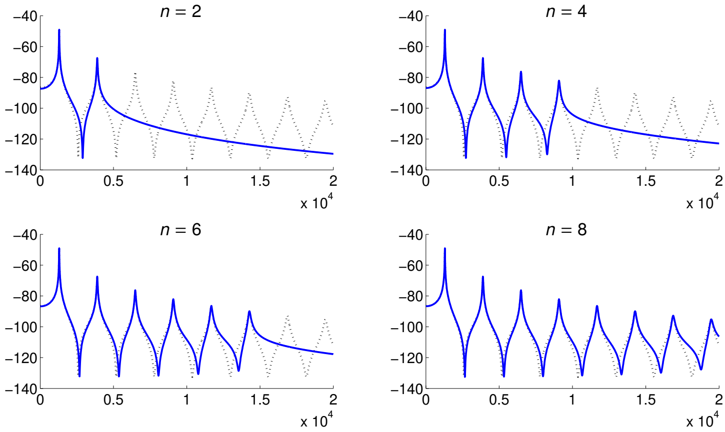


Figure 3.6- Évolution fréquentielle du déplacement d'une barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force harmonique en $x = L$: réponse au point d'excitation obtenue par approche modale.

Principe de décomposition modale

Cas d'une excitation par mouvement d'un support

Système : barre soumise en $x = 0$ à un déplacement imposé u^{gr}

- **Dans le référentiel du support en mouvement**, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = -\rho S \frac{d^2 u^{\mathrm{gr}}}{dt^2} \quad \text{avec} \quad u^* = u - u^{\mathrm{gr}}$$

- En supposant un mouvement oscillant à la pulsation de forçage $u^*(x,t) = U^*(x) e^{j\omega t}$ et en s'appuyant sur une décomposition modal $U^* = \sum_k \Phi_k X_k$, puis en observant encore les propriétés d'orthogonalité, l'équation précédente devient :

$$\boxed{-\omega^2 \Phi_i + \Omega_i^2 (1 + j\eta) \Phi_i = \omega^2 \rho S U^{\mathrm{gr}} \int_0^L X_i \, dx \qquad \forall i \geq 1.}$$

  où on a pris en compte les phénomènes de dissipation à l'aide du facteur de perte η.

- Les Φ_i sont alors données par

$$\boxed{\Phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \rho S U^{\mathrm{gr}} \int_0^L \sin(\beta_i x) \, dx}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2} \qquad \forall i \geq 1,}$$

  où les modes de barre encastrée-libre sont encore utilisés.

✎ Démonstration 3.9

Si $u^* = u - u^{\text{gr}}$, alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho S \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = -\rho S \frac{d^2 u^{\text{gr}}}{dt^2}}$$

On suppose $u^*(x,t) = U^*(x) e^{j\omega t}$ et donc :

$$-\omega^2 \rho S U^* - E(1 + j\omega \frac{\mu}{E}) S \frac{d^2 U^*}{dx^2} = \omega^2 \rho S U^{\text{gr}}$$

$$\rho S U^* + \frac{E}{\omega^2}(1 + j\eta) S \frac{d^2 U^*}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}}$$

On pose ensuite $U^* = \sum_k \Phi_k X_k$ et donc :

$$\rho S \sum_k \Phi_k X_k + \frac{E}{\omega^2}(1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}}$$

$$\int_0^L X_r \left(\rho S \sum_k \Phi_k X_k + \frac{E}{\omega^2}(1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}} \right) dx$$

$$\int_0^L X_r \left(\rho S \sum_k \Phi_k X_k - \frac{E}{\omega^2}(1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \beta_k^2 X_k = -\rho S U^{\text{gr}} \right) dx$$

✎ Démonstration 3.9

Du fait de l'orthogonalité des modes on obtient :

$$\Phi_i - \frac{E}{\omega^2}(1+j\eta)\Phi_i\frac{\beta_i^2}{\rho} = -\int_0^L X_i \rho S U^{\mathrm{gr}} dx$$

$$\Phi_i - \frac{E}{\omega^2}(1+j\eta)\Phi_i\frac{\Omega_i^2}{E} = -\rho S U^{\mathrm{gr}}\int_0^L X_i dx$$

$$-\omega^2\Phi_i + \Omega_i^2(1+j\eta)\Phi_i = \omega^2\rho S U^{\mathrm{gr}}\int_0^L X_i\, dx$$

Finalement on a bien :

$$\boxed{\Phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2\rho S U^{\mathrm{gr}}\int_0^L X_i dx}{(1+j\eta)-(\omega/\Omega_i)^2} = \frac{(\omega/\Omega_i)^2\rho S U^{\mathrm{gr}}\int_0^L \sin(\beta_i x)\, dx}{(1+j\eta)-(\omega/\Omega_i)^2}}$$

Digression sur d'autres problèmes de vibrations

- **Arbre cylindrique** (cf. Fig. 3.7(a)) : $\boxed{\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \dfrac{\rho}{G}\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[,}$ où $\alpha = \alpha(t, x)$ représente la rotation d'une section de l'arbre positionnée à l'abscisse x, G représente le module de cisaillement $[Pa]$, et où l'on a pris en compte que le couple de torsion s'exprime $GJ\alpha'$ (J représente le moment d'inertie polaire $[m^4]$).

- **Corde tendue** (cf. Fig. 3.7(b)) : $\boxed{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{m}{T}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[,}$ où $w = w(t, x)$ représente le déplacement transversal d'un point de la corde positionné à l'abscisse x ; m et T représentent respectivement la masse par unité de longueur $[kg.m^{-1}]$ et la tension de la corde $[N]$.

- **Onde acoustique (plane)** : $\boxed{\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[,}$ où $p = p(t, x)$ représente le pression acoustique en un point du tube d'abscisse x ; $c = \sqrt{\gamma P_{atm}/\rho_0}$ est la vitesse du son dans le milieu considéré. Avec dans l'air $\gamma = 1,4$ (rapport des chaleurs spécifiques), $P_{atm} \approx 1$ bar (pression atmosphérique) et $\rho_0 = 1,2$ g/cm^3 (masse volumique de l'air).

Principe de décomposition modale

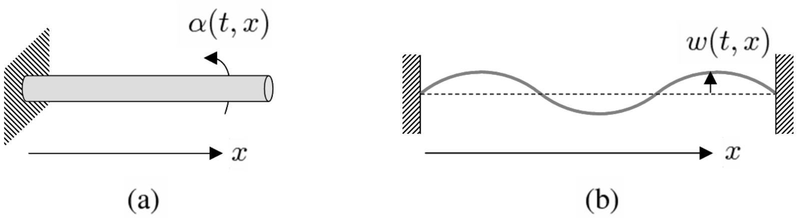


Figure 3.7- Problèmes de vibrations analogues à celui d'une barre : (a) torsion d'un arbre cylindrique ; (b) corde tendue.

Plan du cours

Introduction générale

Chapitre 1 – Systèmes à un degré de liberté

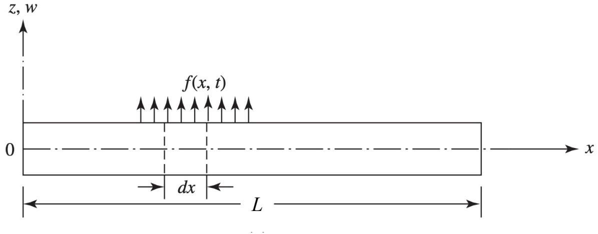
Chapitre 2 – Systèmes à plusieurs degrés de liberté

Chapitre 3 – Systèmes élastiques continus
3.1 Introduction
3.2 Vibrations longitudinales des barres
3.3 Vibrations transversales des poutres

Bibliographie

Vibrations libres et modes de vibrations

⇒ **Problème étudié :** vibrations libres d'une poutre en flexion **droite, homogène et non amortie**.



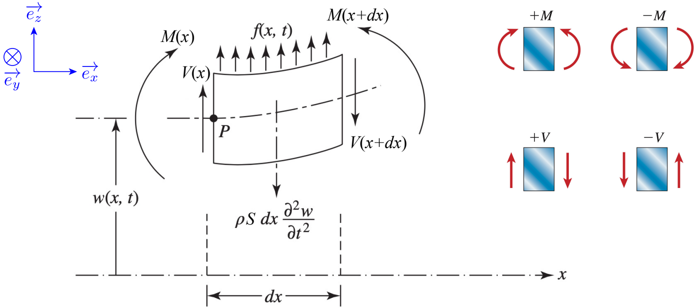
- **Caractéristiques matérielles et géométriques :** densité ρ $[kg.m^{-3}]$, module d'Young E $[Pa]$, section S $[m^2]$, moment quadratique de section I $[m^4]$, longueur L $[m]$.
- $w = w(t, x)$: **déplacement transversal de la fibre neutre**.

Équations du mouvement

A la position x, l'équation du mouvement du système s'exprime alors par :

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad x \in]0, L[}$$

✎ Démonstration 3.10



- **Moment fléchissant M :** moment dont le vecteur est perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant de la flexion.
- **Effort tranchant V :** force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillement

En négligeant les effets inertiels de rotation les équations de la dynamique s'écrivent :

PFD (suivant $\mathbf{e}_z$) :
$$-V(x+dx) + f(x,t)dx + V(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)$$

TMC en P (suivant $\mathbf{e}_y$) :
$$-M(x+dx) + V(x+dx)dx - f(x,t)dx\frac{dx}{2} + M(x) = 0$$

✎ Démonstration 3.9

En notant $\boxed{V(x+dx) = V(x) + \frac{\partial V}{\partial x} dx}$ et $\boxed{M(x+dx) = M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx}$, les équations précédentes deviennent :

PFD (suivant $\mathbf{e}_z$) : $$-\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) + f(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)$$

TMC en P (suivant $\mathbf{e}_y$) : $$\frac{\partial M}{\partial x}(x,t) - V(x,t) = 0$$

La 2e équation permet d'écrire $\boxed{V = \frac{\partial M}{\partial x}}$ (voir chap. 9 de [Gere et Goodno(2012)]) et la 1ére devient :

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)$$

La théorie élémentaire de la flexion des poutres (*cf. cours R. Serra* et [Gere et Goodno(2012)], chap. 9, éq. (9-7)) nous dit que $\boxed{M = EI \frac{\partial^2 w}{dx^2}}$ (et donc $\boxed{V = EI \frac{\partial^3 w}{dx^3}}$) L'équation précédente devient donc :

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x,t) \qquad x \in]0, L[}$$

Vibrations libres et modes de vibrations

Solutions stationnaires harmoniques de l'équation homogène

- On considère les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation Ω) du problème en posant

$$\boxed{w(x,t) = X(x)\cos(\Omega t)}$$

- Avec $\boxed{f(x,t) = 0}$, l'équation à résoudre devient :

$$\boxed{\frac{d^4X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \beta = \left(\frac{\Omega^2 \rho S}{EI}\right)^{1/4}}$$

  β : **nombre d'onde de flexion** et λ : **longueur d'onde**

- Solution : $\boxed{X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\mathrm{ch}(\beta x) + D\mathrm{sh}(\beta x) \qquad x \in [0, L]}$

  A, B, C et D : constantes déterminées à partir des **conditions aux limites**.

✎ Démonstration 3.10

On cherche les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation Ω) du problème en posant $\boxed{w(x,t) = X(x)\cos(\Omega t)}$ qui est introduit dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4}\cos(\Omega t) - \frac{\rho S}{EI}\Omega^2 X\cos(\Omega t) = 0$$

L'équation à résoudre est donc bien :

$$\boxed{\frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \beta = \left(\frac{\Omega^2 \rho S}{EI}\right)^{1/4}}$$

Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^4 - \beta^4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r = \pm\beta, \pm j\beta}$$

et donc :

$$\boxed{X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\mathrm{ch}(\beta x) + D\mathrm{sh}(\beta x) \qquad x \in [0, L]}$$

Conditions aux limites

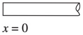
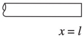
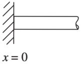
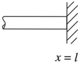
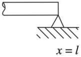
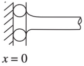
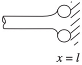
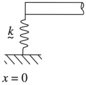
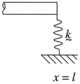
Les conditions aux limites sont définies en considérant les 4 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion (voir [Gere et Goodno(2012)], Chap. 9) :

- le déplacement dû à la flexion : $\boxed{w(x,t)}$
- le déplacement angulaire (rotation) dû à la flexion : $\boxed{\theta(x,t) = \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}}$
- le moment de flexion : $\boxed{M(x,t) = EI\dfrac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}}$
- l'effort tranchant : $\boxed{V(x,t) = EI\dfrac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}}$

Définition

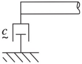
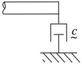
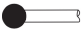
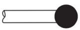
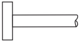
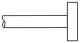
Une **condition aux limites homogène** consiste à annuler l'une de ses grandeurs

Conditions aux limites

Boundary condition		At left end ($x = 0$)		At right end ($x = l$)
1. Free end (bending moment = 0, shear force = 0)		$EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert_{(0,t)} = 0$		$EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert_{(l,t)} = 0$
2. Fixed end (deflection = 0, slope = 0)		$w(0,t) = 0$ $\dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0$		$w(l,t) = 0$ $\dfrac{\partial w}{\partial x}(l,t) = 0$
3. Simply supported end (deflection = 0, bending moment = 0)		$w(0,t) = 0$ $EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$		$w(l,t) = 0$ $EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$
4. Sliding end (slope = 0, shear force = 0)		$\dfrac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert_{(0,t)} = 0$		$\dfrac{\partial w}{\partial x}(l,t) = 0$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert_{(l,t)} = 0$
5. End spring (spring constant = $\underset{\sim}{k}$)		$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert_{(0,t)} = -\underset{\sim}{k}w(0,t)$ $EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$		$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\rvert(l,t) = \underset{\sim}{k}w(l,t)$ $EI\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$

Tiré de [Rao(2019)]

Conditions aux limites

Boundary condition	At left end ($x = 0$)		At right end ($x = l$)	
6. End damper (damping constant = $\underset{\sim}{c}$)	$\underset{\sim}{c}$  $x = 0$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(0,t)} =$ $-\underset{\sim}{c}\frac{\partial w}{\partial t}(0,t)$ $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$	 $\underset{\sim}{c}$ $x = l$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(l,t)} =$ $\underset{\sim}{c}\frac{\partial w}{\partial t}(l,t)$ $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$
7. End mass (mass = $\underset{\sim}{m}$ with negligible moment of inertia)	$\underset{\sim}{m}$  $x = 0$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(0,t)} =$ $-\underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)$ $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$	$\underset{\sim}{m}$  $x = l$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(l,t)} =$ $\underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)$ $EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$
8. End mass with moment of inertia (mass = $\underset{\sim}{m}$, moment of inertia = $\underset{\sim}{J}_0$)	$\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{J}_0$ $\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{J}_0$  $x = 0$	$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) =$ $-\underset{\sim}{J}_0\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(0,t)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(0,t)} =$ $-\underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)$	$\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{J}_0$ $\underset{\sim}{m}, \underset{\sim}{J}_0$  $x = l$	$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) =$ $\underset{\sim}{J}_0\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(l,t)$ $\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\rvert_{(l,t)} =$ $\underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)$

Tiré de [Rao(2019)]

Poutre en appuis simples

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad X|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=L} = 0}$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$\boxed{X_i(x) = B\sin(\beta_i x) \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \qquad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \qquad i \geq 1}$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\boxed{\Omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \qquad i \geq 0}$$

Remarque

Poutre en appuis simples : seul cas où il y a une solution analytique

✎ Démonstration 3.11

Les dérivées successives de $X(x)$ sont :

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\mathrm{ch}(\beta x) + D\mathrm{sh}(\beta x)$$

$$\frac{dX}{dx} = -\beta A\sin(\beta x) + \beta B\cos(\beta x) + \beta C\mathrm{sh}(\beta x) + \beta D\mathrm{ch}(\beta x)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\beta^2 A\cos(\beta x) - \beta^2 B\sin(\beta x) + \beta^2 C\mathrm{ch}(\beta x) + \beta^2 D\mathrm{sh}(\beta x)$$

Les conditions aux limites d'une poutre an appui simple s'écrivent donc :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A + C = 0 \tag{3.8}$$

$$X|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(\beta L) + B\sin(\beta L) + C\mathrm{ch}(\beta L) + D\mathrm{sh}(\beta L) = 0 \tag{3.9}$$

$$\left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\beta^2 A + \beta^2 C = 0 \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\beta^2 A\cos(\beta L) - \beta^2 B\sin(\beta L) + \beta^2 C\mathrm{ch}(\beta L) + \beta^2 D\mathrm{sh}(\beta L) \tag{3.11}$$

✎ Démonstration 3.11

$$(3.8) + (3.10) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = C = 0}$$

Les équations (3.9) et (3.11) deviennent donc :

$$B\sin(\beta L) + D\mathrm{sh}(\beta L) = 0 \qquad (3.12)$$

$$-B\sin(\beta L) + D\mathrm{sh}(\beta L) = 0 \qquad (3.13)$$

En effectuant les opérations suivantes on obtient :

$$(3.12) + (3.13) \quad \Rightarrow \quad 2D\mathrm{sh}(\beta L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = 0}$$

$$(3.12) - (3.13) \quad \Rightarrow \quad \boxed{2B\sin(\beta L)} \ \textbf{équation caractéristique} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta_i = \frac{i\pi}{L} \ (i \geq 1)}$$

Finalement la déformée modale s'écrit :

$$\boxed{X_i = B\sin(\beta_i x) \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \qquad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \qquad i \geq 1}$$

Poutre en appuis simples

Déformées modales

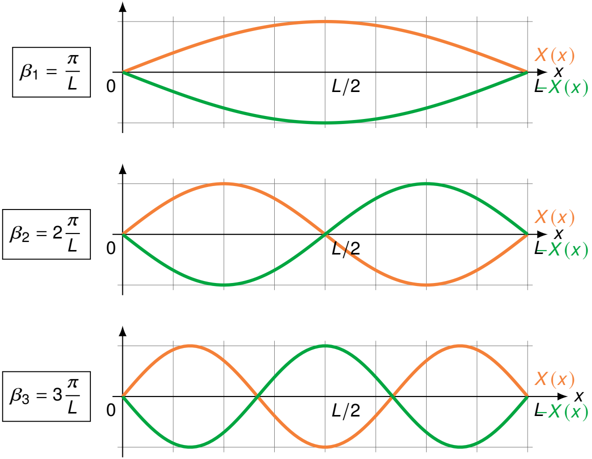


Figure 3.8- Évolution spatiale des formes propres $\{X_i\}_{i=1,2,3}$ pour une poutre en appuis simples.

Poutre encastrée-libre

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dX}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{d^3X}{dx^3}\right|_{x=L} = 0}$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$X_i(x) = A\left(\cos(x\beta_i) - \mathrm{ch}(x\beta_i) + \frac{(\cos(L\beta_i) + \mathrm{ch}(L\beta_i))\,(\mathrm{sh}(x\beta_i - \sin(x\beta_i)))}{\sin(L\beta_i) + \mathrm{sh}(L\beta_i)}\right) \quad x \in [0, L] \tag{3.14}$$

Avec

$$\boxed{\beta_1 L = 1.8751}, \quad \boxed{\beta_2 L = 4.69409}, \quad \boxed{\beta_3 L = 7.85476}, \quad \boxed{\beta_i L \approx (2i-1)\frac{\pi}{2} \text{ pour } i > 3}$$

Poutre encastrée-libre

Déformées modales

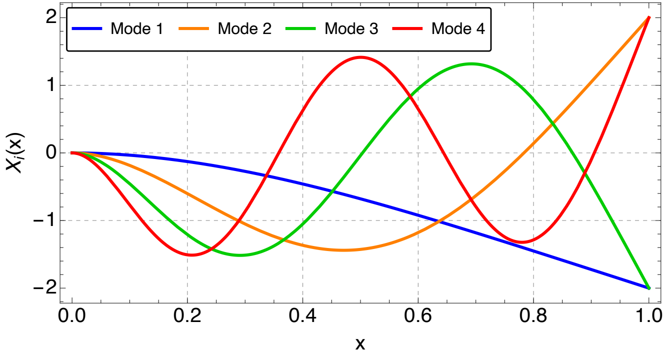


Figure 3.9- Évolution spatiale des formes propres $\{X_i\}_{i=1,2,3,4}$ pour une poutre encastrée-libre.

✎ Démonstration 3.12

Les dérivées successives de $X(x)$ sont :

$$
\begin{aligned}
X &= A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\mathrm{ch}(\beta x) + D\mathrm{sh}(\beta x) \\
\frac{dX}{dx} &= -\beta A\sin(\beta x) + \beta B\cos(\beta x) + \beta C\mathrm{sh}(\beta x) + \beta D\mathrm{ch}(\beta x) \\
\frac{d^2X}{dx^2} &= -\beta^2 A\cos(\beta x) - \beta^2 B\sin(\beta x) + \beta^2 C\mathrm{ch}(\beta x) + \beta^2 D\mathrm{sh}(\beta x) \\
\frac{d^3X}{dx^3} &= A\beta^3\sin(\beta x) - B\beta^3\cos(\beta x) + C\beta^3\mathrm{sh}(\beta x) + D\beta^3\mathrm{ch}(\beta x)
\end{aligned}
$$

Les conditions aux limites en $x = 0$ donnent :

$$
\begin{cases}
X(x)|_{x=0} = \boxed{A + C = 0} \\
\left.\dfrac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0} = \boxed{\beta B + \beta D = 0}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
A = -C \\
B = -D
\end{cases}
$$

donc

$$
\left.\frac{d^2X(x)}{dx^2}\right|_{x=L} = A\left(\mathrm{ch}(\beta L) + \cos(\beta L)\right) + B\left(\mathrm{sh}(\beta L) + \sin(\beta L)\right) = 0
$$

ce qui donne

$$
\boxed{B = -\frac{\mathrm{ch}(\beta L) + \cos(\beta L)}{\mathrm{sh}(\beta L) + \sin(\beta L)}A} \Rightarrow \textbf{On retrouve bien } (3.14)
$$

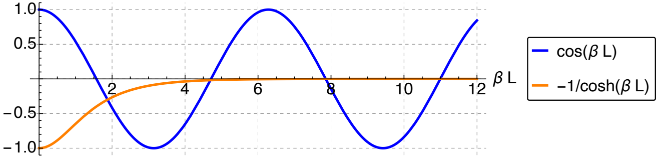
✎ Démonstration 3.12

La 2ème C.L. en $x = L$ s'écrit

$$\left.\frac{dl^3 W(x)}{dx^3}\right|_{x=L} = A(\sin(\beta L) - \text{sh}(\beta L)) - B(\cos(\beta L) + \text{ch}(\beta L)) = 0$$

d'où finalement $\boxed{\dfrac{2A\beta^3(\cos(\beta L)\text{ch}(\beta L) + 1)}{\sin(\beta L) + \text{sh}(\beta L)} = 0}$

L'**équation caractéristique** s'écrit : $\boxed{\cos(\beta L)\text{ch}(\beta L) + 1 = 0}$ ou $\boxed{\cos(\beta L) = -1/\text{ch}(\beta L)}$



Graphiquement (numériquement) on a donc bien :

$$\boxed{\beta_1 L = 1.8751},\quad \boxed{\beta_2 L = 4.69409},\quad \boxed{\beta_3 L = 7.85476}$$

De plus $\boxed{\lim_{\beta L \to \infty} (1/\text{ch}(\beta L)) = 0}$ d'où $\boxed{\lim_{\beta L \to \infty} \cos(\beta L) = 0}$ donc $\boxed{\beta_i L \approx (2i - 1)\dfrac{\pi}{2}}$

Modes de vibrations

Orthogonalité des modes de vibration

Deux modes donnés (Ω_r, X_r) et (Ω_s, X_s), pour lesquels $\Omega_r \neq \Omega_s$, vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\boxed{\int_0^L X_r X_s \, dx = 0 \quad , \quad \int_0^L \frac{d^2 X_r}{dx^2} \frac{d^2 X_s}{dx^2} \, dx = 0 \quad \text{lorsque} \quad r \neq s}$$

Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires** m_i et k_i définies par :

$$\boxed{m_i = \rho S \int_0^L X_i^2 \, dx \quad , \quad k_i = EI \int_0^L \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 dx \qquad \forall i \geq 1}$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par $\boxed{\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}}$

✎ Démonstration 3.13 – Orthogonalité des modes de vibration

L'équation des formes propres est écrite pour deux modes différents X_r et X_s

$$\frac{d^4X_r}{dx^4} - \beta_r^4 X_r = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{d^4X_s}{dx^4} - \beta_s^4 X_s = 0 \quad \text{avec} \quad r \neq s \tag{3.16}$$

On effectue $\int_0^L X_s(3.15)dx$:

$$\int_0^L \left(X_s \frac{d^4X_r}{dx^4} + \beta_r^4 X_s X_r \right) dx = 0$$

$$\left[X_s \frac{d^3X_r}{dx^3} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dX_s}{dx} \frac{d^3X_r}{dx^3} dx - \int_0^L \beta_r^4 X_s X_r dx = 0$$

$$\underbrace{\left[X_s \frac{d^3X_r}{dx^3} \right]_0^L - \left[\frac{dX_s}{dx} \frac{d^2X_r}{dx^2} \right]_0^L}_{=0 \textbf{ (C.I. homogènes)}} + \int_0^L \frac{d^2X_s}{dx^2} \frac{d^2X_r}{dx^2} dx - \int_0^L \beta_r^4 X_s X_r dx = 0 \tag{3.17}$$

puis $\int_0^L X_r(3.16)dx$:

$$\underbrace{\left[X_r \frac{d^3X_s}{dx^3} \right]_0^L - \left[\frac{dX_r}{dx} \frac{d^2X_s}{dx^2} \right]_0^L}_{=0 \textbf{ (C.I. homogènes)}} + \int_0^L \frac{d^2X_s}{dx^2} \frac{d^2X_r}{dx^2} dx - \int_0^L \beta_s^4 X_s X_r dx = 0 \tag{3.18}$$

✎ Démonstration 3.13 – Orthogonalité des modes de vibration

En faisant (3.17)-(3.18), on obtient :

$$\boxed{\left(\beta_s^4 - \beta_r^4\right) \int_0^L X_r X_s dx = 0}$$

Par conséquent comme $r \neq s$ alors :

$$\boxed{\int_0^L X_r X_s dx = 0} \qquad (3.19)$$

En introduisant (3.19) dans (3.17) (ou (3.18)), on a également :

$$\boxed{\int_0^L \frac{d^2 X_r}{dx^2} \frac{dX_s^2}{dx^2} dxdx = 0}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

On considère le problème de réponse forcée **harmonique** d'une poutre amortie, les phénomènes d'amortissement étant pris en compte à partir d'un **facteur de perte** η (ce type d'amortissement a été précédemment évoqué pour le cas de la barre en traction-compression).

Les excitations envisagées peuvent être de natures assez diverses : **forces transversales**, **moments**, **déplacements transversaux** ou **rotations**.

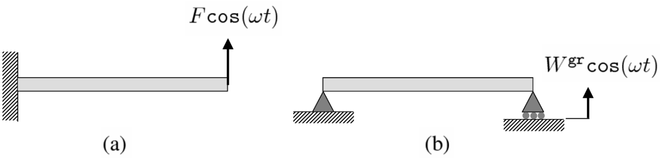


Figure 3.10- Vibrations forcée harmonique d'une poutre excitée à l'une de ses extrémités : (a) force imposée ; (b) déplacement imposé.

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

- La **réponse stationnaire** s'obtient par considération d'une solution particulière $w(x,t) = W(x)e^{j\omega t}$ de

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \qquad x \in]0, L[$$

- L'amplitude complexe W est donc décrite par l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{d^4 W}{dx^4} - {\gamma^*}^4 W = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \gamma^* = \left(\frac{\omega^2 \rho S}{E^* I}\right)^{1/4}}$$

- L'amplitude complexe W s'exprime alors par

$$\boxed{W = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x} + Ce^{-\gamma^* x} + De^{\gamma^* x} \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \quad \gamma^* = \left(\frac{\omega^2 \rho S}{E^* I}\right)^{1/4}}$$

où γ^* est le **nombre d'onde de flexion complexe**.

✎ Démonstration 3.14

La forme de solution recherchée $w(x,t) = W(x)e^{j\omega t}$ est introduite dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 W}{dx^4}e^{j\omega t} - \omega^2 \frac{\rho S}{EI} W e^{j\omega t} = 0$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{d^4 W}{dx^4} - \gamma^4 W = 0 \qquad x \in]0, L[\qquad \text{où} \quad \gamma = \left(\frac{\omega^2 \rho S}{EI}\right)^{1/4}}$$

Si on souhaite prendre en compte de la dissipation on introduit encore

$$E^* = E(1 + j\eta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma^* = \left(\frac{\omega^2 \rho S}{E^* I}\right)^{1/4}}$$

Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^4 - \gamma^{*4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \pm\gamma^*, \pm i\gamma^*}$$

et donc

$$\boxed{W = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x} + Ce^{-\gamma^* x} + De^{\gamma^* x} \qquad x \in [0, L] \qquad \text{où} \quad \gamma^* = \left(\frac{\omega^2 \rho S}{E^* I}\right)^{1/4}}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

La solution stationnaire s'exprime à partir de **4 constantes** A, B, C et D , obtenues par application des **conditions aux limites** qui contiennent le forçage :

- **Poutre encastrée en $x = 0$ et excitée par force transversale en $x = L$** :
  Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\boxed{W|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{dW}{dx}\right|_{x=0} = 0 \quad , \quad E^*I\left.\frac{d^2W}{dx^2}\right|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad -E^*I\left.\frac{d^3W}{dx^3}\right|_{x=L} = F}$$

On a donc

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -j\gamma^* & j\gamma^* & -\gamma^* & \gamma^* \\ -{\gamma^*}^2 e^{-j\gamma^* L} & -{\gamma^*}^2 e^{j\gamma^* L} & {\gamma^*}^2 e^{-\gamma^* L} & {\gamma^*}^2 e^{\gamma^* L} \\ j{\gamma^*}^3 e^{-j\gamma^* L} & -j{\gamma^*}^3 e^{j\gamma^* L} & -{\gamma^*}^3 e^{-\gamma^* L} & {\gamma^*}^3 e^{\gamma^* L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F/(E^*I) \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

Les constantes A, B, C et D s'obtiennent alors par inversion numérique de la matrice **G** :

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}}$$

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

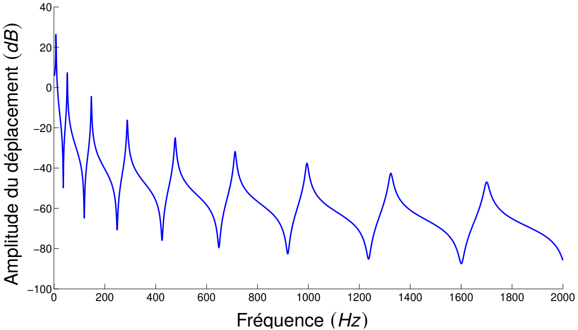


Figure 3.11- Évolution fréquentielle (en échelle logarithmique) du déplacement transversal (amplitude) d'une poutre encastrée en $x = 0$ et excitée par force harmonique en $x = L$: réponse au point d'excitation.

Remarque

Il y a **résonance quand la pulsation de forçage est proche d'une des pulsations propres du système libre** (quand il n'a pas de d'amortissement, pulsation propres et de forçage coïncident).

Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

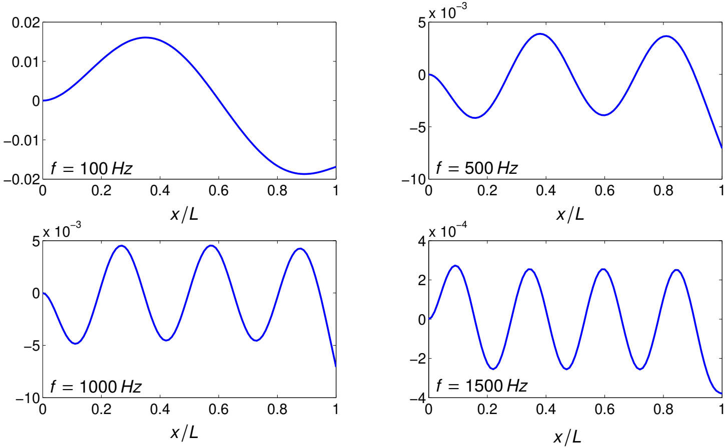


Figure 3.12- Évolution spatiale du déplacement (Re $[W]$) d'une poutre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$.

Principe de décomposition modale

Proposition

Les formes propres $\{X_i\}_{i\geq 0}$ constituent une base de représentation pour décrire le comportement dynamique du système (possiblement forcé). Dans le cas où il n'existe pas de mode de corps rigide, la décomposition modale se traduit par

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x),}$$

$\phi_i = \phi_i(t)$: **amplitudes modales**.

Principe de troncature modale

En pratique, comme dans le cas de la barre en traction, seuls n modes $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont retenus pour décrire la décomposition modale. C'est le **principe de troncature modale**. La décomposition s'écrit alors :

$$\boxed{w(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(t) X_i(x)}$$

Principe de décomposition modale

Cas des vibrations libres non amorties

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d^2\phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2\phi_i = 0 \qquad \forall i \geq 1 \\ \phi_i|_{t=0} = \phi_{j0} = \rho S \displaystyle\int_0^L X_i u_0 \, dx \quad , \quad \left.\dfrac{d\phi}{dt}\right|_{t=0} = \dot{\phi}_{i0} = \rho S \displaystyle\int_0^L X_i \dot{u}_0 \, dx \end{cases}}$$

- La solution de chacune des équations précédentes est connue (cf. Chap. 2) :

$$\boxed{\phi_i = \phi_{i0}\cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i}\sin(\Omega_i t)}$$

✎ Démonstration 3.15

On suppose un décomposition modale de type $w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x)$ qui est introduite dans l'équation du mouvement sans amortissement :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\int_0^L X_r \left(EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{d^4 X_i}{\partial x^4} + \rho S \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\int_0^L X_r \left(EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \beta_i^4 X_i + \rho S \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\frac{EI}{\rho S} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \beta_i^4 \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx}_{\substack{= 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i}} = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, les définition des masses et raideurs modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\boxed{\frac{EI}{\rho S} \beta_i^4 \phi_i + \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} = 0}$$

✎ Démonstration 3.16

Comme $\boxed{\beta = \left(\frac{\Omega^2 \rho S}{EI}\right)^{1/4}}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad \forall i \geq 1}$$

Il faut aussi projeter les conditions initiales $w(x,0) = w_0$ dans la base des modes propres :

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i$$

$$\rho S \int_0^L X_r w_0 dx = \rho S \int_0^L X_r \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i dx$$

$$\rho S \int_0^L X_r w_0 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} \rho S \int_0^L X_r X_i dx$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\boxed{\phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i w_0 \, dx} \quad \text{et} \quad \boxed{\dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{w}_0 \, dx}$$

Ferdinand P. Beer : *Mechanics of materials*. McGraw-Hill, New York, 6th ed édition, 2011. ISBN 978-0-07-338028-5.

Paolo L. Gatti : *Applied Structural and Mechanical Vibrations : Theory, Methods*. CRC Press, Taylor & Francis Group, deuxième édition, 2014.

M. Géradin et D. Rixen : *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, Paris, 1994.

James M. Gere et Barry J. Goodno : *Mechanics of Materials*. Global Engineering, brief édition, 2012.

K. G. Graff : *Wave Motion in Elastic Solids*. London, Oxford University Press, 1991.

G. Kelly : *Mechanical Vibrations, Theory and Applications*. McGraw-Hill, deuxième édition, 2000.

G. Kelly : *Green's functions with applications*. Chapman & Hall/CRC, deuxième édition, 2015.

J. C Pascal : *Vibration et acoustique*. Polycopié de cours de l'ENSIM, Le Mans, 2008.

Singiresu S. Rao : *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2nd édition, 2019.

S. Timoshenko, D. H. Young et Weaver W. : *Vibration Problem in Engineering*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.