Vibrations des structures 1

Vibrations des systèmes discrets

Baptiste Bergeot

Maître de Conférences - baptiste.bergeot@insa-cvl.fr - bureau D03

4A INSA Centre Val de Loire

Génie des **S**ystèmes **I**ndustriels (GSI)

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES CENTRE VAL DE LOIRE

Plan du cours

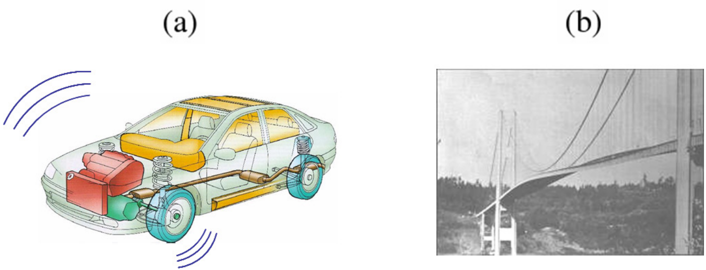


Figure 1.1- Exemples de problématiques industrielles : (a) vibrations d'une automobile générant du bruit ; (b) instabilité aéroélastique du pont de Tacoma (avant destruction !).

Plan du cours

Plan du cours

Introduction

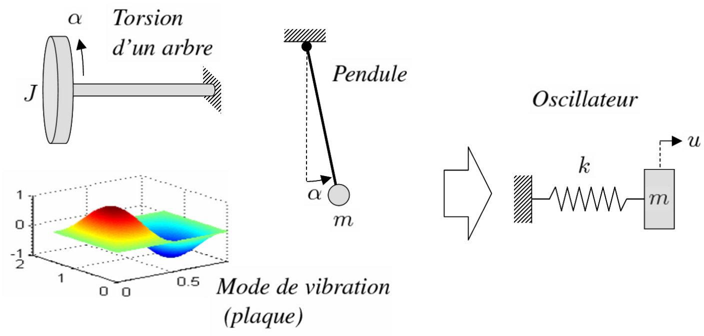


Figure 1.1- Exemples de systèmes à 1 DDL et oscillateur linéaire (m, k) équivalent.

Plan du cours

Cas des systèmes non amortis

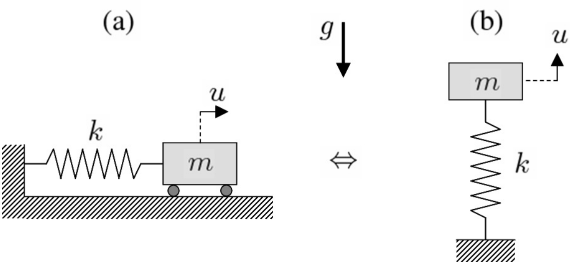


Figure 1.2- Système masse-ressort : (a) gravité non prise en compte ; (b) gravité prise en compte.

Équations du mouvement d'un oscillateur harmonique

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

$\Rightarrow$ u : déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique x_{eq}^{st}

✎ Démonstration 1.1

Force de rappel d'un ressort : norme proportionnelle à son allongement $\boxed{|F| = k(\ell - \ell_0)}$

k : raideur du ressort (N/m ou kg/s^2)
ℓ_0 : longueur du ressort à vide

ℓ : longueur du ressort hors équilibre

ℓ_{eq} : longueur du ressort à l'équilibre

✎ Démonstration 1.1

Force de rappel d'un ressort : norme proportionnelle à son allongement $\boxed{|F| = k(\ell - \ell_0)}$

k : raideur du ressort (N/m ou kg/s^2)
ℓ_0 : longueur du ressort à vide

ℓ : longueur du ressort hors équilibre

ℓ_{eq} : longueur du ressort à l'équilibre

$\Longrightarrow$ Configuration horizontale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers la droite :

- À l'équilibre :

  $$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) = -k(x_{eq}^{st} - x_0) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0}$$

- Hors équilibre :

  $$ma = -k(\ell - \ell_0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient finalement :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.1

⟹ Configuration verticale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers le haut :

- À l'équilibre :

$$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) - mg = -k(x_{eq}^{st} - x_0) - mg \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0 - \frac{mg}{k}}$$

- Hors équilibre :

$$ma = -k(\ell - \ell_0) - mg = -k(x - x_0 + \frac{mg}{k}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient également :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.2

⟹ Configuration verticale

Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe (Ox) orienté vers le haut :

- À l'équilibre :

$$0 = -k(\ell_{eq}^{st} - \ell_0) - mg = -k(x_{eq}^{st} - x_0) - mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq}^{st} = x_0 - \frac{mg}{k}}$$

- Hors équilibre :

$$ma = -k(\ell - \ell_0) - mg = -k(x - x_0 + \frac{mg}{k}) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} = -k(x - x_{eq}^{st})}$$

En posant $u = x - x_{eq}^{st}$, on obtient également :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0}$$

⟹ **Oscillateur harmonique** de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

$$\boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0}$$

Cas des systèmes non amortis

Solutions dans le cas non amorti

$$\boxed{u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}, \ \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}}, \ \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

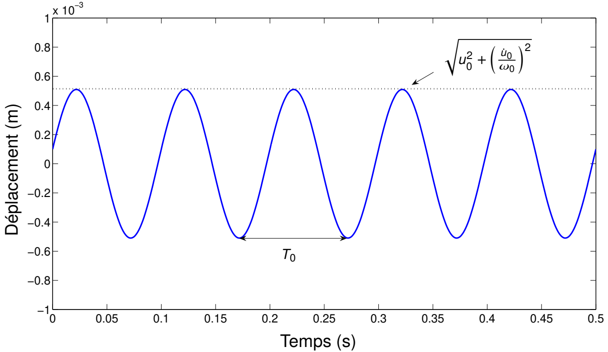


Figure 1.3- Vibrations libres d'un oscillateur (m, k) soumis aux conditions initiales $u(t = 0) = u_0$ et $\dot{u}(t = 0) = \dot{u}_0$.
dd essai

✎ Démonstration 1.3

On a :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donc :

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{u} = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$

+ Conditions initiales : $u(t=0) = u_0$, $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \quad \Rightarrow \boxed{A = u_0}$ et $\boxed{B = \dfrac{\dot{u}_0}{\omega_0}}$

d'où finalement :

$$\boxed{u(t) = u_0\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

Pour calculer l'amplitude $|u| = D$ de la solution on pose :

$$u(t) = D\cos(\omega_0 t + \varphi) = D\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\right)$$

Par identification on a $A = D\cos(\varphi)$ et $B = -D\sin(\varphi)$ et donc

$$\boxed{D = |u| = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et aussi} \quad \boxed{\tan\varphi = -\frac{B}{A}}$$

Cas des systèmes amortis

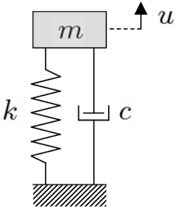


Figure 1.4- Système masse-ressort avec amortisseur visqueux.

Amortisseur visqueux

Pour ce type d'amortissement, la force F_c induite sur la masse est telle qu'elle s'oppose à sa vitesse, c'est-à-dire :

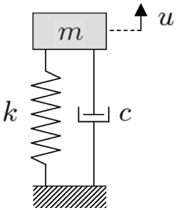
$$\boxed{F_c = -c\dot{u}}$$

c : coefficient d'amortissement (N.s/m ou kg/s)

Équations du mouvement

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$$

✎ Démonstration 1.4



Principe Fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur l'axe vertical orienté vers le haut :

$$m\ddot{u} = -c\dot{u} - ku \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0}$$

Cas des systèmes amortis

Solutions générales du système amorti

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\,\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \text{ et } \boxed{\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}}$$

ζ : taux d'amortissement

Plusieurs formes selon que $\boxed{\zeta < 1}$, $\boxed{\zeta = 1}$ ou $\boxed{\zeta > 1}$:

- **Mouvement sous-amorti :** $\zeta < 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\zeta\,\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]}$,
  où $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ représente la pulsation propre apparente du système.
  Dans ce cas, le mouvement est **pseudo-périodique** et l'**amplitude des oscillations suit une décroissance exponentielle**.
- **Mouvement critique :** $\zeta = 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\omega_0 t}[A + Bt]}$.
  Dans ce cas, le mouvement est **apériodique** : il n'y a pas de vibrations.
- **Mouvement sur-amorti :** $\zeta > 1 \Rightarrow \boxed{u = e^{-\zeta\,\omega_0 t}\left[Ae^{-\left(\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_0 t} + Be^{\left(\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_0 t}\right]}$.
  Dans ce cas, le mouvement est **apériodique** : il n'y a pas de vibrations.

Cas des systèmes amortis

Solutions dans le cas sous-amorti

$$\boxed{u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}$$

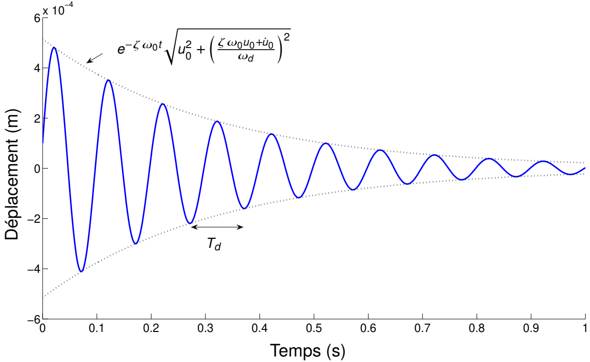


Figure 1.5- Vibrations libres d'un oscillateur (m, k, c) faiblement amorti ($\zeta = 0.05$), soumis à des conditions initiales arbitraires $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$.

✎ Démonstration 1.5

On a :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Le polynôme caractéristique P est $r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ et son discriminant $\Delta = 4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(-1+\zeta^2)$ donc les racines de P sont :

$$r_1 = -\zeta\omega_0 - j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d} \qquad r_2 = -\zeta\omega_0 + j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}_{\omega_d}$$

En appliquant les règles usuelles de résolutions des équations différentielles du 2nd ordre on a bien si $\zeta < 1$:

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\omega_d A\sin(\omega_d t) + \omega_d B\cos(\omega_d t)\right]$$

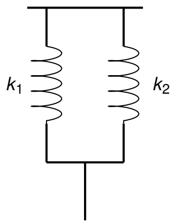
+ Conditions initiales :

$$u(t=0) = u_0 \Rightarrow \boxed{A = u_0}$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \Rightarrow \dot{u}_0 = -\zeta\omega_0 A + \omega_d B \Rightarrow \boxed{B = \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}}$$

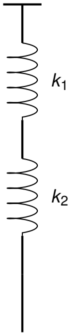
Ressorts et amortisseurs en parallèle et en série

En parallèle



$$\boxed{k_{eq} = k_1 + k_2}$$

En série



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{k_{eq} = \frac{k_1\,k_2}{k_1 + k_2}}$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Cas des systèmes amortis

Méthode du décrément logarithmique

Objectif : mesurer le taux d'amortissement ζ par la mesure de l'amplitude à t et $t + nT_d$

$$|u| = e^{-\zeta\omega_0 t}\mathrm{Cste} \quad \Rightarrow \quad \frac{|u|_{t+nT_d}}{|u|_t} = e^{-\zeta\omega_0 nT_d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\zeta = \frac{1}{\omega_0 nT_d}\ln\left\{\frac{|u|_t}{|u|_{t+nT_d}}\right\}}$$

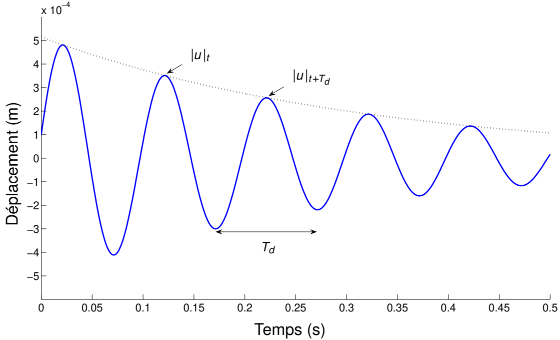


Figure 1.6- Variation d'amplitude de vibrations entre deux instants t et $t + T_d$, séparés d'une période T_d.

Plan du cours

Introduction

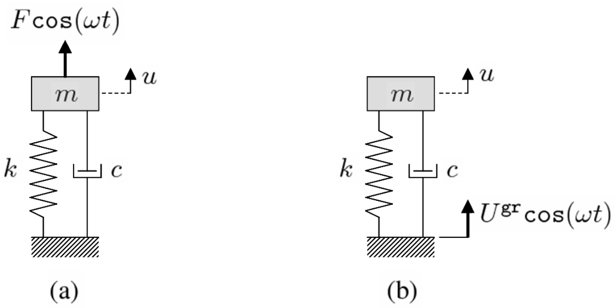


Figure 1.7- Système masse-ressort-amortisseur sous-excitation harmonique forcée : (a) excitation par force imposée à la masse ; (b) excitation par mouvement du support.

Équations du mouvement

Force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f}$$

Mouvement du support imposé

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{gr} + ku^{gr}}$$

f et u^{gr} sont harmoniques de pulsation ω, c-à-d de la forme $A\cos(\omega t)$

Excitation par force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F\cos\omega t}$$

Solution Générale	=	Solution de l'équation homogène (sans second membre)	+	Solution particulière de l'équation avec second membre
u	=	u^h **Régime transitoire**	+	u^p **Régime stationnaire**

- **Régime transitoire :** connu, $\boxed{u^h = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]}$
- **Régime stationnaire :** on cherche une **solution harmonique de pulsation** ω (la pulsation d'excitation) de la forme $\boxed{u^p = U^p\cos(\omega t - \varphi)}$.
- **Deux cas possibles** pour la résolution :
  - **Sans amortissement ($c = 0$)** : fonctions trigonométriques ; $\boxed{u^p = U^p\cos(\omega t)}$
  - **Avec amortissement :** fonction exponentielles complexes

$\boxed{\hat{u}^p = U^p e^{j(\omega t-\varphi)} = \widehat{U}^p e^{j\omega t}}$ avec $\boxed{u^p = \mathrm{Re}\left[\hat{u}^p\right]}$ $\boxed{\hat{U}^P = U^p e^{-j\varphi}}$ **: amplitude complexe**

Excitation par force imposée

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} = Fe^{j\omega t}}$ avec $u = \mathrm{Re}\,[\hat{u}]$
- Solution particulière de la forme $\boxed{\hat{u}^p = \hat{U}^p e^{j\omega t}}$ avec $\hat{U}^p$:

$$\boxed{\hat{U}^p = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = U^{\mathrm{st}} A_\omega = U^{\mathrm{st}} \beta e^{-j\varphi}}$$

$$\boxed{U^{\mathrm{st}} = \frac{F}{k}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg\left\{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0\right\}}$$

- Solution particulière $\hat{u}^p$:

$$\hat{u}^p(t) = \beta U^{\mathrm{st}} e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^p(t) = \beta U^{\mathrm{st}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta U^{\mathrm{st}} \cos(\omega t - \varphi)}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

✎ Démonstration 1.6 et 1.7

On a l'équation du mouvement complexe suivante :

$$m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} = Fe^{j\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\hat{u}} + 2\zeta\omega_0\dot{\hat{u}} + \omega_0^2\hat{u} = \frac{F}{m}e^{j\omega t}$$

On cherche une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage $\hat{u}^p = \hat{U}^p e^{j\omega t}$. Cette dernière est introduite dans l'équations du mouvement :

$$-\omega^2\hat{U}^p e^{j\omega t} + j\omega 2\zeta\omega_0\hat{U}^p e^{j\omega t} + \omega_0^2\hat{U}^p e^{j\omega t} = \frac{F}{m}e^{j\omega t}$$

Après simplification par division par $e^{j\omega t}$ et division par ω_0^2 et en notant que $F/(m\omega_0^2) = F/k$ on a arrive bien à :

$$\hat{U}^p = \frac{F/k}{1-(\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\omega/\omega_0} = U^{\mathrm{st}}A_\omega = U^{\mathrm{st}}\beta e^{-j\varphi}$$

La solution particulière est $\hat{u}^p(t) = \beta U^{\mathrm{st}} e^{j(\omega t-\varphi)}$ et donc $u^p(t) = \mathrm{Re}\left[\hat{u}^p(t)\right] = \beta U^{\mathrm{st}}\cos(\omega t-\varphi)$.

La solution générale est donc :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta U^{\mathrm{st}}\cos(\omega t-\varphi)$$

+ Conditions initiales : $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ qui mène à :

$$\boxed{A = u_0 - \beta U^{\mathrm{st}}\cos(\varphi) \quad , \quad B = \frac{\zeta u_0\omega_0 + \dot{u}_0 - \beta U^{\mathrm{st}}\left(\zeta\omega_0\cos(\varphi) + \omega\sin(\varphi)\right)}{\omega_d}}$$

Excitation par force imposée

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad , \quad \varphi = \arg\left\{1-(\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0\right\}}$$

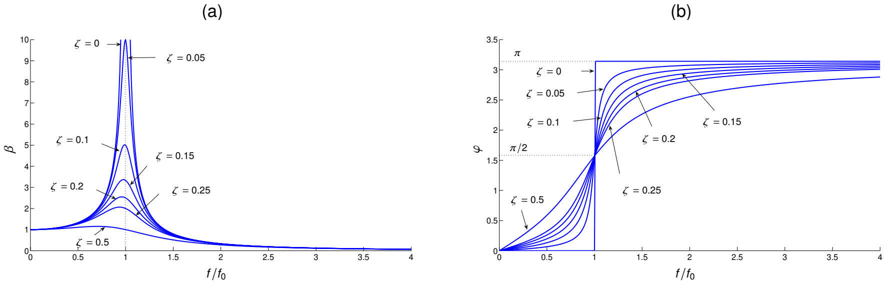


Figure 1.8- (a) Variation fréquentielle de β (b) Variation fréquentielle de φ.

- Amplitude maximale : $\boxed{\max\{\beta\} = \beta|_{f=f_0^{re}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$
- Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0\sqrt{1-2\zeta^2}}$ $\boxed{\neq f_d = f_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

✎ Démonstration 1.8

- On rappelle l'expression de β :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

- Le maximum de β s'obtient lorsque le terme $(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2$ atteint un minimum.
- En effectuant le changement de variable $\Omega = (\omega/\omega_0)^2$, cela revient à résoudre

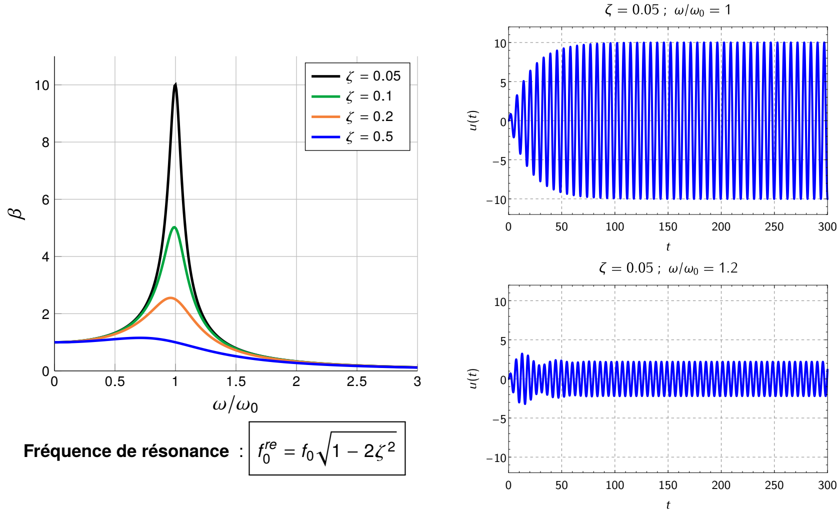
$$\frac{\partial}{\partial\Omega}\left[(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Omega^{re} = 1 - 2\zeta^2}$$

- On obtient alors

$$\max\{\beta\} = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^{re})^2 + 4\zeta^2\Omega^{re}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2(1-2\zeta^2)}} = \boxed{\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Excitation par force imposée

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \beta\frac{F}{k}\cos(\omega t - \varphi)$$



Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0\sqrt{1-2\zeta^2}}$

Excitation par force imposée

Méthode de la largeur de bande à -3dB

- On relève les valeurs de fréquences à $\beta = \max\{\beta\}/\sqrt{2}$ ($20\log_{10}\{1/\sqrt{2}\} \approx -3$dB) : il y en a deux. L'écart entre ces deux fréquences, noté Δf.

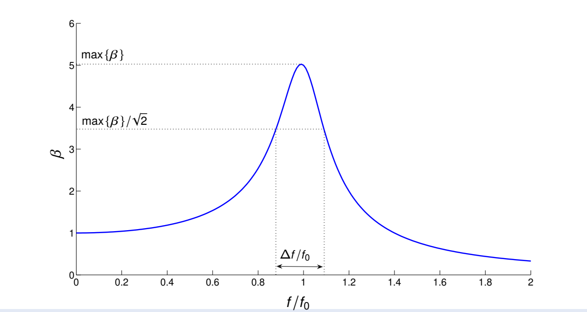


Figure 1.9- Illustration de la largeur de bande à $\max\{\beta\}/\sqrt{2}$.

- On déduit : $\boxed{\zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta f}{f_0}}$

✎ Démonstration 1.9 – Méthode de la largeur de bande à −3dB

En posant $\Omega = (\omega/\omega_0)^2$, on a

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega}}$$

Comme

$$\frac{\max\{\beta\}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

résoudre $\beta = \max(\beta)/\sqrt{2}$ revient à chercher les deux valeurs de Ω telles que :

$$(1-\Omega)^2 + 4\zeta^2\Omega = 8\zeta^2(1-\zeta^2)$$

qui s'écrit encore :

$$\Omega^2 + (4\zeta^2 - 2)\Omega + 1 - 8\zeta^2(1-\zeta^2) = 0$$

dont les racines sont :

$$\Omega_{1/2} = (1-2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

En supposant $\zeta \ll 1$, on obtient finalement :

$$\Omega_{1/2} \approx 1 \pm 2\zeta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\Omega_{1/2}} \approx 1 \pm \zeta \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 2\zeta \;\; (\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\zeta = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f_0}}$$

Excitation par déplacement imposé

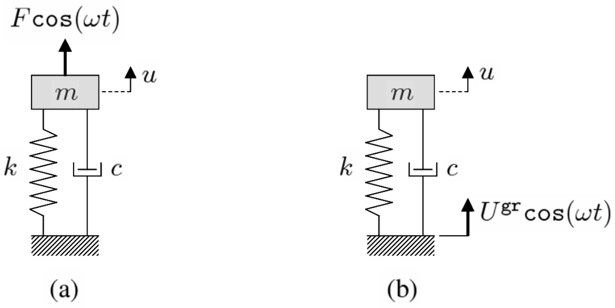


Figure 1.10- Système masse-ressort-amortisseur sous-excitation harmonique forcée : (a) excitation par force imposée à la masse ; (b) excitation par mouvement du support.

Équations du mouvement

Force imposée

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f}$$

Mouvement du support imposé

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{gr} + ku^{gr}}$$

f et u^{gr} sont harmoniques de pulsation ω, c-à-d de la forme $A\cos(\omega t)$

Excitation par déplacement imposé

Équation du mouvement dans le référentiel du support en mouvement

L'équation du mouvement, dans le *référentiel fixe*, est :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\mathrm{gr}} + ku^{\mathrm{gr}}}$$

On se place dans le *référentiel du support en mouvement* en posant

$$\boxed{u^* = u - u^{\mathrm{gr}}} \qquad \text{(\textbf{déplacement relatif})}$$

et on obtient :

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{\mathrm{gr}}}$$

qui devient

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = m\omega^2 U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)}$$

si $u^{\mathrm{gr}} = U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)$

✎ Démonstration 1.10

L'allongement du ressort est $\boxed{u - u^{gr}}$ et la vitesse relative de la masse par rapport au bâti (qui est en mouvement) est $\boxed{\dot{u} - \dot{u}^{gr}}$.

L'application du PFD à la masse donne donc :

$$m\ddot{u} = -k\left(u - u^{gr}\right) - c\left(\dot{u} - \dot{u}^{gr}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\mathrm{gr}} + ku^{\mathrm{gr}}}$$

En utilisant le déplacement relatif $u^* = u - u^{\mathrm{gr}}$ on obtient finalement :

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{\mathrm{gr}}$$

qui devient

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = m\omega^2 U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)}$$

si $u^{\mathrm{gr}} = U^{\mathrm{gr}} \cos(\omega t)$.

Excitation par déplacement imposé

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = m\omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}}$ avec $u^* = \mathrm{Re}\left[\hat{u}^*\right]$
- Solution particulière de la forme $\boxed{\hat{u}^{p^*} = \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}}$ avec $\hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}$:

$$\boxed{\hat{U}^{p^*} = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{gr}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = U^{gr} A^*_\omega = U^{gr}\beta^* e^{-j\varphi^*}}$$

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi^* = \varphi}$$

- Solution particulière $\hat{u}^{*p}$:

$$\hat{u}^{*p}(t) = \beta^* U^{gr} e^{j(\omega t - \varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^{*p}(t) = \beta^* U^{gr}\cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + U^{gr}\left[\beta^*\cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}}$$

Les constantes A et B sont déterminée à partir des conditions initiales.

✎ Démonstration 1.11

On a l'équation du mouvement complexe suivante :

$$m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = m\omega^2 U^{gr} e^{j\omega t} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\hat{u}}^* + 2\zeta\omega_0\dot{\hat{u}}^* + \omega_0^2\hat{u}^* = \omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}$$

On cherche une solution particulière oscillant à la pulsation de forçage $\hat{u}^{p^*} = \hat{U}^{p^*} e^{j\omega t}$. Cette dernière est introduite dans l'équations du mouvement :

$$-\omega^2\hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} + j\omega 2\zeta\omega_0\hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} + \omega_0^2\hat{U}^{p^*} e^{j\omega t} = \omega^2 U^{gr} e^{j\omega t}$$

Après simplification par division par $e^{j\omega t}$ et division par ω_0^2 on a arrive bien à :

$$\hat{U}^{p^*} = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{\mathrm{gr}}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\omega/\omega_0} = U^{\mathrm{gr}} A_\omega^* = U^{\mathrm{gr}} \beta^* e^{-j\varphi^*}$$

La solution particulière est $\hat{u}^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} e^{j(\omega t - \varphi)}$ et donc $u^{*^p}(t) = \beta^* U^{gr} \cos(\omega t - \varphi)$.

La solution générale $u(t)$ est donc :

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + U^{gr}\left[\beta^*\cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}$$

\+ Conditions initiales : $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$ qui mène à :

$$\boxed{A = u_0 - \beta U^{\mathrm{gr}}(1 + \cos(\varphi)) \quad , \quad B = \frac{\zeta\omega_0(u_0 - U^{\mathrm{gr}}) + \dot{u}_0 - \beta U^{\mathrm{gr}}(\zeta\omega_0\cos(\varphi) + \omega\sin(\varphi))}{\omega_d}}$$

Excitation par déplacement imposé

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

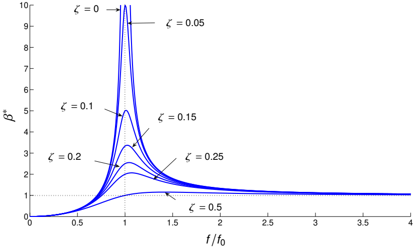
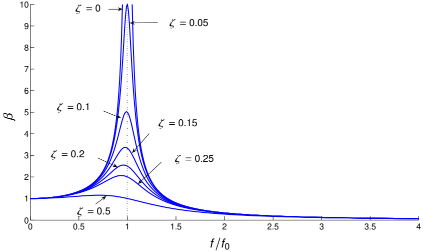


Figure 1.11- Variation fréquentielle du coefficient d'amplification dynamique : cas d'une excitation par déplacement imposé.

- Amplitude maximale : $\boxed{\max\{\beta^*\} = \beta^*|_{f=f_0^{re}} = \frac{1}{(1-2\zeta^2)\sqrt{1/(1-2\zeta^2)^2 - 1}}}$
- Fréquence de résonance : $\boxed{f_0^{re} = f_0/\sqrt{1-2\zeta^2}}$ $\boxed{\neq f_d = f_0\sqrt{1-\zeta^2}}$

Force imposée

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$

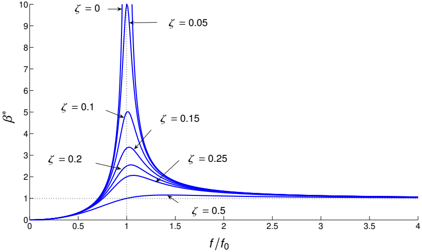


- $f/f_0 \to 0$; $\beta \to 1$; $|U| \to U_F^{st}$
- $f/f_0 \to \infty$; $\beta \to 0$; $|U| \to 0$
- Fréquence de résonance :

$$\boxed{f_0^{re} = f_0\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Mouvement support imposé

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}}$$



- $f/f_0 \to 0$; $\beta^* \to 0$; $|U^*| \to 0$; $u = u^{gr}$
- $f/f_0 \to \infty$; $\beta^* \to 1$; $|U^*| \to U^{gr}$
- Fréquence de résonance :

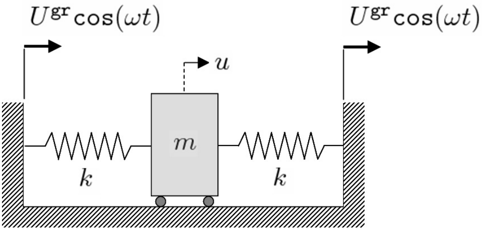
$$\boxed{f_0^{re} = f_0/\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

Excitation par déplacement imposé

Exercice 1.1.

Soit le système décrit par la figure ci-dessous.

1. Exprimer l'équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous, excité par déplacement imposé.
2. Donner la solution générale et donner la valeur du déplacement u en fonction des conditions initiales $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = 0$.



Excitation par accélération imposé $\gamma^{gr} = \Gamma^{gr}\cos(\omega t)$

- Équation du mouvement complexe : $\boxed{m\ddot{\hat{u}}^* + c\dot{\hat{u}}^* + k\hat{u}^* = -m\Gamma^{gr}e^{j\omega t}}$ avec $u^* = \mathrm{Re}\left[\hat{u}^*\right]$
- Amplitude complexe U^{p^*} :

$$\boxed{U^{p^*} = \frac{-\Gamma^{gr}/\omega_0^2}{1-(\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta\,\omega/\omega_0} = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}A_\omega^* = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta^* e^{-j\varphi^*}}$$

$$\boxed{\beta^* = \beta \quad \text{et} \quad \varphi^* = \varphi}$$

- Solution particulière $\hat{u}^{*^p}$:

$$\hat{u}^{*^p}(t) = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta e^{j(\omega t-\varphi)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u^{*^p}(t) = \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\beta\cos(\omega t - \varphi)}$$

- Solution générale $u(t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + u^{gr}(t) = u^*(t) + \frac{\Gamma^{gr}}{\omega^2}(1-\cos(\omega t)) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] - \frac{\Gamma^{gr}}{\omega_0^2}\left[\beta\cos(\omega t-\varphi) + \cos(\omega t)\right] \end{aligned}}$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales.

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Principe de superposition

- Soit un oscillateur harmonique excité par $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_N$

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\,\omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = f_1 + f_2 + \cdots + f_N}$$

- On considère les N sous-système suivants :

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + 2\zeta\,\omega_0 \dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 &= f_1 \\
\ddot{u}_2 + 2\zeta\,\omega_0 \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 &= f_2 \\
&\vdots \\
\ddot{u}_N + 2\zeta\,\omega_0 \dot{u}_N + \omega_0^2 u_N &= f_N
\end{aligned}$$

- Le **principe de superposition** stipule que :

$$\boxed{u^p(t) = u_1^p(t) + u_2^p(t) + \cdots + u_N^p(t)}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Équations du mouvement

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t)}$$

avec $f(t)$ **un fonction périodique**.

Stratégie de résolution :

- On fait la **série de Fourier de** $f(t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(t) = F_0 + \sum_{r\geq 1}[F_r \cos(r\omega t) + F_r' \sin(r\omega t)]}$

$$\boxed{F_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \quad F_r = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(r\omega t)dt, \quad F_r' = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(r\omega t)dt}$$

- On considère plusieurs « **sous-problèmes harmoniques** »
- La **solution stationnaire** du mouvement (sous sa forme complexe), notée $\hat{u}^p$, s'obtient sur la base du **principe de superposition** :

$$\boxed{u^p = u_0 + \sum_{r\geq 1} \mathrm{Re}\left[U_r e^{rj\omega t}\right] + \mathrm{Im}\left[U_r' e^{rj\omega t}\right]}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

Stratégie de résolution (suite) :

- u_0 représente une solution particulière de l'équation suivante :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0.}$$

- Les termes $\hat{U}_r e^{rj\omega t}$ et $\hat{U}'_r e^{rj\omega t}$ représentent des solutions particulières pour les sous-problèmes harmoniques suivants :

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\hat{u}} + c\dot{\hat{u}} + k\hat{u} &= F_r e^{rj\omega t} \qquad \forall r \geq 1, \\ m\ddot{\hat{u}}' + c\dot{\hat{u}}' + k\hat{u}' &= F'_r e^{rj\omega t} \qquad \forall r \geq 1. \end{aligned}}$$

- L'obtention de ces solutions particulières ne pose pas de problèmes, c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{aligned} u_0 &= F_0/k, \\ \hat{U}_r &= \frac{F_r/k}{1 - (r\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta r\omega/\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}_r = A_{r\omega} U_r^{st} \qquad \forall r \geq 1, \\ \hat{U}'_r &= \frac{F'_r/k}{1 - (r\omega/\omega_0)^2 + 2j\zeta r\omega/\omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{U}'_r = A_{r\omega} U_r'^{st} \qquad \forall r \geq 1, \end{aligned}}$$

Digression sur la notion d'excitations périodiques

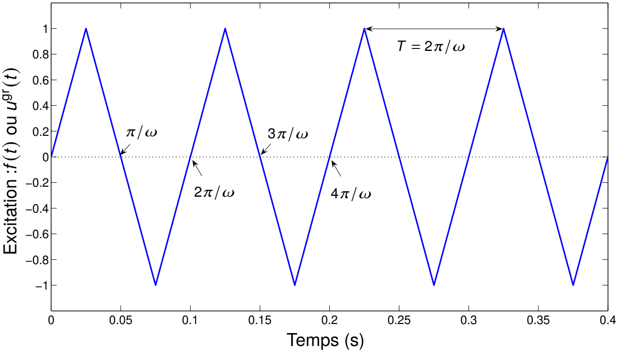


Figure 1.12- Illustration d'une excitation périodique non harmonique.

Exercice 1.2.

Donner la représentation en série de Fourier du signal périodique illustré sur la Figure 2.11.

Plan du cours

Excitation par force imposée

Équations du mouvement

$$\boxed{\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{f(t)}{m} = \bar{f}(t)}$$ avec $f(t)$ **un fonction quelconque**.

Stratégie de résolution :

- Calcul de la **fonction de Green** :

$$\boxed{\ddot{g}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t)} \quad \text{avec } g(0) = 0 \text{ (causalité)}$$

- On peut montrer que : $\boxed{g(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\frac{1}{\omega_d}\mathcal{H}(t)\sin[\omega_d t]}$ ($\mathcal{H}(t)$: fonction de Heaviside)

- **Intégrale de superposition :** $\boxed{u^p(t) = \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau.}$

- Solution générale avec $u(t=0) = u_0$ et $\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0$:

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \frac{1}{\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau}\bar{f}(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]}$$

✎ Démonstration 1.12 - Calcul de la fonction de Green

On part de :

$$\ddot{g}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = \delta(t) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

qui devient, pour $t > 0$:

$$\boxed{\ddot{g}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t) + \omega_0^2 g(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0} \tag{1.2}$$

Pour trouver les conditions initiales de (1.2) on intègre (1.1) sur un petit intervalle autour de 0, cela donne

$$\underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \ddot{g}(t)dt}_{\dot{g}(0^+)-\dot{g}(0^-)} + 2\zeta\omega_0 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \dot{g}(t)dt}_{g(0^+)-g(0^-)} + \omega_0^2 \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} g(t)dt}_{\to 0 \text{ quand } \epsilon \to 0} = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$$

Continuité de g en $t = 0$: $g(0^-) = g(0^+) \Rightarrow \boxed{g(0^+) - g(0^-) = 0}$

Causalité : $\dot{g}(0^-) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{g}(0^+) = 1}$.

Finalement les conditions initiales pour (1.2) sont $\boxed{g(0) = 0 \quad \text{and} \quad \dot{g}(0) = 1}$ et (si $\zeta < 1$)

$$\boxed{g(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\frac{1}{\omega_d}\mathcal{H}(t)\sin[\omega_d t]}$$

Remarque : le fonction de Heaviside $\mathcal{H}(t)$ sert à expliciter la causalité de la fonction de Green.

✎ Démonstration 1.12 - Intégrale de superposition

$$\ddot{g}(t-\tau) + 2\zeta\omega_0\dot{g}(t-\tau) + \omega_0^2 g(t-\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau < t$$

$$\frac{d^2 g(t-\tau)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dg(t-\tau)}{dt} + \omega_0^2 g(t-\tau) = 0$$

$$\frac{d^2[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{d[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt} + \omega_0^2\bar{f}(\tau)g(t-\tau) = 0$$

$$\int_0^t \frac{d^2[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt^2}d\tau + \int_0^t 2\zeta\omega_0\frac{d[\bar{f}(\tau)g(t-\tau)]}{dt}d\tau + \int_0^t \omega_0^2\bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau = 0$$

Règle de Leibniz : $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \underbrace{\bar{f}(t)g(0)}_{=0} + \int_0^t \bar{f}(\tau)\dot{g}(t-\tau)d\tau$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \underbrace{\bar{f}(t)\dot{g}(0)}_{=\bar{f}(t)} + \int_0^t \bar{f}(\tau)\ddot{g}(t-\tau)d\tau$$

En notant $y(t) = \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau$ on obtient : $\boxed{\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = \bar{f}(t)}$ qui est de l'équation initiale.

On peut donc choisir $y(t)$ comme solution particulière de l'équation initiale. La solution générale s'écrit donc :

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + \int_0^t \bar{f}(\tau)g(t-\tau)d\tau}$$

✎ Démonstration 1.12 - Fin

En remarquant que $\int_0^t f(\tau)\mathcal{H}(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau$ et en appliquant les règles usuelles de résolutions des équations différentielles du 2nd ordre on a bien si $\zeta < 1$:

$$u = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]$$

$$\dot{u} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right] + e^{-\zeta\omega_0 t}\left[-\omega_d A\sin(\omega_d t) + \omega_d B\cos(\omega_d t)\right]$$

$$+\frac{1}{m\omega_d}\frac{d}{dt}\left(e^{-\zeta\omega_0 t}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right)$$

avec $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

+ Conditions initiales :

$u(t=0) = u_0 \Rightarrow \boxed{A = u_0}$

$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \Rightarrow \dot{u}_0 = -\zeta\omega_0 A + \omega_d B \Rightarrow \boxed{B = \dfrac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}}$ et on retrouve :

$$\boxed{u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left[u_0\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d}\int_0^t e^{\zeta\omega_0\tau} f(\tau)\sin[\omega_d(t-\tau)]d\tau\right]}$$

Plan du cours

Plan du cours

Introduction

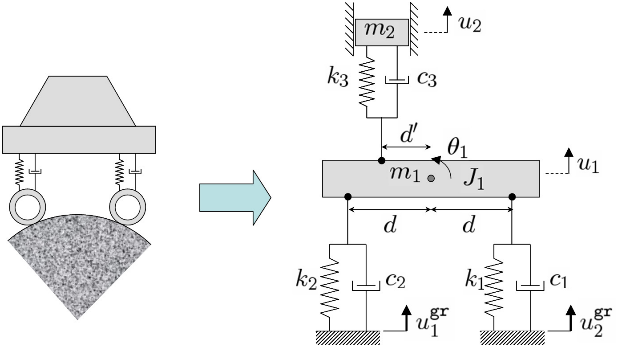
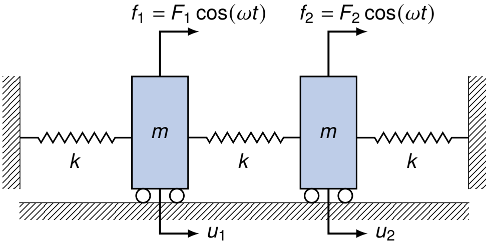


Figure 2.1- Exemple de système à 3 DDLs et modélisation équivalente.

Plan du cours

Exemple d'un système conservatif



- Après calcul, on trouve pour les amplitudes U_1 et U_2 (réelles car pas d'amortissement) :

$$\boxed{U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}}$$

- Le dénominateur s'annule (**résonance**) pour les **pulsations de résonance** :

$$\boxed{\omega_1^{re} = \sqrt{k/m}} \text{ et } \boxed{\omega_2^{re} = \sqrt{3k/m}}$$

✎ Démonstration 2.1

⟹ PFD sur la masse de gauche :

$$m\ddot{u}_1 = -ku_1 - k(u_1 - u_2) + F_1\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = F_1\cos(\omega t)}$$

⟹ PFD sur la masse de droite :

$$m\ddot{u}_2 = -ku_2 - k(u_2 - u_1) + F_2\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = F_2\cos(\omega t)}$$

Les équations du mouvement du système constitué des 2 masses couplées est :

$$\left\{\begin{array}{l} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = F_1\cos(\omega t) \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = F_2\cos(\omega t) \end{array}\right.$$

et donc sous forme matricielle cela donne :

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1\cos(\omega t) \\ F_2\cos(\omega t) \end{Bmatrix}}$$

avec : **M : matrice de masse** et **K : matrice de raideur**

✎ Démonstration 2.1

- Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = F_1 \cos(\omega t) \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = F_1 \cos(\omega t) \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

- On cherche une solution stationnaire sous la forme : $\boxed{\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t) = \mathbf{U}\cos(\omega t)}$ que l'on introduit

dans l'équation précédente. On obtient : $\mathbf{D}\mathbf{U} = \mathbf{F}$ avec $\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}}$$

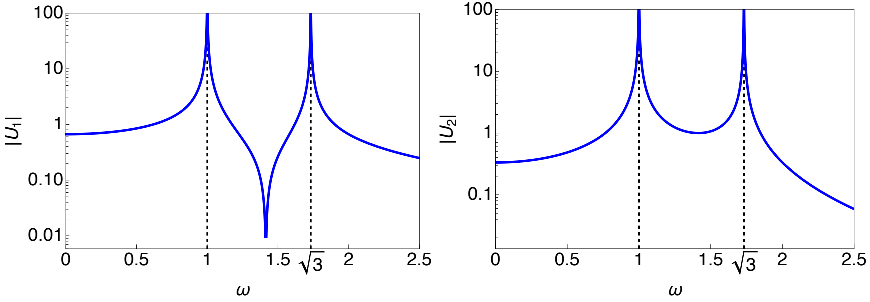
- On sait que $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}$, on a donc :

$$\boxed{U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}}$$

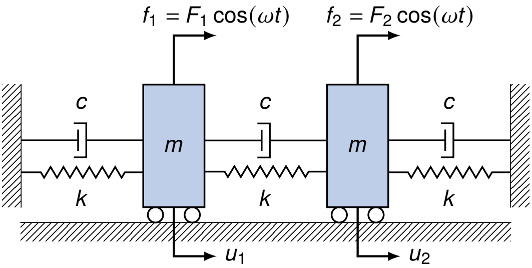
Exemple d'un système conservatif

$$\boxed{U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)}}$$

- **Paramètres :** $k = 1$, $m = 1$, $F_1 = 1$ et $F_2 = 0, 2$.
- **Pulsations propres :** $\boxed{\Omega_1 = \sqrt{k/m} = 1}$ et $\boxed{\Omega_2 = \sqrt{3k/m} = \sqrt{3}}$
- **Pulsations de résonance :** $\boxed{\omega_1^{re} = \sqrt{k/m} = 1}$ et $\boxed{\omega_2^{re} = \sqrt{3k/m} = \sqrt{3}}$



Exemple d'un système amorti



✎ Démonstration 2.2

- En formalisme complexe, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m\ddot{\hat{u}}_1 + 2c\dot{\hat{u}}_1 - c\dot{\hat{u}}_2 + 2k\hat{u}_1 - k\hat{u}_2 = F_1 e^{j\omega t} \\ m\ddot{\hat{u}}_2 + 2c\dot{\hat{u}}_2 - c\dot{\hat{u}}_1 + 2k\hat{u}_2 - k\hat{u}_1 = F_2 e^{j\omega t} \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

- On cherche une solution stationnaire sous la forme : $\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t} = \hat{\mathbf{U}} e^{j\omega t}}$ que l'on introduit dans l'équation précédente. On obtient : $\mathbf{DU} = \mathbf{F}$ avec $\mathbf{D} = -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}}$$

- On sait que $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}$, on a donc :

$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{(2F_1 + F_2)\,k - F_1 m\omega^2 + jc\,(2F_1 + F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)} \quad \text{et} \quad \hat{U}_2 = \frac{(F_1 + 2F_2)\,k - F_2 m\omega^2 + jc\,(F_1 + 2F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

✎ Démonstration 2.2

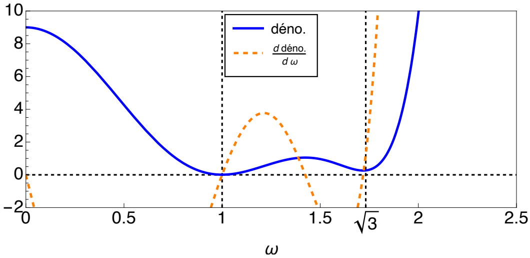
- Les amplitudes $|\hat{U}_1|$ et $|\hat{U}_2|$ sont :

$$|\hat{U}_1| = \frac{\sqrt{(2cF_1\omega + cF_2\omega)^2 + (2F_1k + F_2k - F_1m\omega^2)^2}}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}\sqrt{9c^2\omega^2 + (m\omega^2 - 3k)^2}}$$

et

$$|\hat{U}_2| = \frac{\sqrt{(cF_1\omega + 2cF_2\omega)^2 + (F_1k + 2F_2k - F_2m\omega^2)^2}}{\sqrt{c^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}\sqrt{9c^2\omega^2 + (m\omega^2 - 3k)^2}}$$

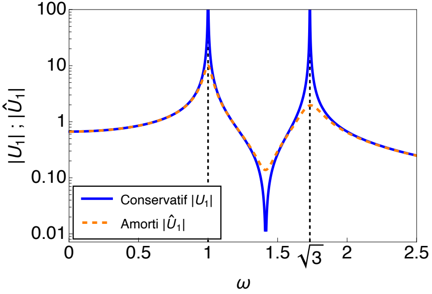
- **Résonance = Min(dénominateur) de $|\hat{U}_1|$ et $|\hat{U}_2|$**

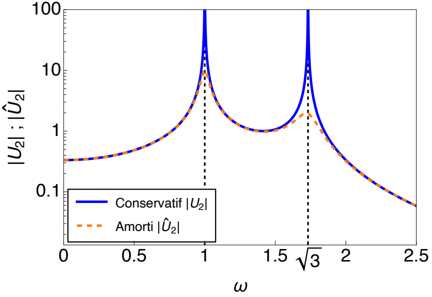


Pas de solutions analytiques simples des pulsations de résonance ici :

obtenues de façon approchée en Sect. 2.3 en utilisant la **décomposition modale**.

Exemple d'un système amorti





Cas général

Forme générale des équations du mouvement

De façon générale (avec de l'amortissement), on a :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t)}$$

- Matrice de masse :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}$$

- Matrice d'amortissement :

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

- Matrice de raideur :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

- Vecteur force :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Cas général

- Équation du mouvement complexe :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

- La **solution stationnaire** (notée $\hat{\mathbf{u}}$) recherchée sous la forme suivante :

$$\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix} e^{j\omega t}}$$

$\hat{U}_1$ et $\hat{U}_2$: amplitudes complexes des déplacements

- En injectant cette forme de solution dans les équations du mouvement, on obtient :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2 M_{11} + j\omega C_{11} + K_{11} & j\omega C_{12} + K_{12} \\ j\omega C_{21} + K_{21} & -\omega^2 M_{22} + j\omega C_{22} + K_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

- **Matrice de rigidité dynamique :**

$$\boxed{\mathbf{D} = -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}}$$

Cas général

- Le système s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} (-\omega^2 M_{11} + j\omega C_{11} + K_{11})U_1 + (j\omega C_{12} + K_{12})U_2 = F_1 \\ \\ (j\omega C_{21} + K_{21})U_1 + (-\omega^2 M_{22} + j\omega C_{22} + K_{22})U_2 = F_2 \end{cases}}$$

- Résolution par **inversion de D** :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}} \quad \boxed{\text{avec} \quad \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{D}} \begin{bmatrix} D_{22} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{11} \end{bmatrix}}$$

- Résolution par la **méthode de Cramer** :

$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} F_1 & D_{12} \\ F_2 & D_{22} \end{bmatrix}}{\det \mathbf{D}} \quad \text{et} \quad \hat{U}_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} D_{11} & F_1 \\ D_{21} & F_2 \end{bmatrix}}{\det \mathbf{D}}}$$

Résonance

Système avec de l'amortissement $\Rightarrow$ condition de résonance : $\boxed{|\det \mathbf{D}| = |\det \mathbf{D}|_{min}}$

Application

Cas d'une excitation par accélération imposée au support

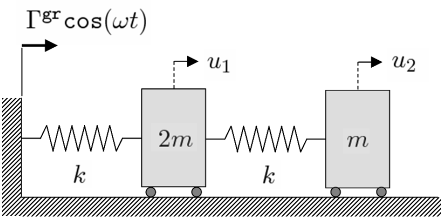


Figure 2.2- Système masses-ressorts excité par accélération imposée.

- Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} 2m\ddot{u}_1 + k(u_1 - u^{gr}) + k(u_1 - u_2) = 0 \\ m\ddot{u}_2 + k(u_2 - u_1) = 0 \end{cases}$$

- Les matrices de masse et de raideur s'expriment donc par

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Application

Cas d'une excitation par accélération imposée au support (suite)

- En posant $u_1^* = u_1 - u^{gr}$ et $u_2^* = u_2 - u^{gr}$, les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} 2m\ddot{u}_1 + 2ku_1^* - ku_2^* = -2m\ddot{u}^{gr} \\ m\ddot{u}_2 - ku_1^* + ku_2^* = -m\ddot{u}^{gr} \end{cases}$$

- Finalement, en posant $u_1^* = U_1^* \cos(\omega t)$ et $u_2^* = U_2^* \cos(\omega t)$, dans le référentiel du support en mouvement, l'équilibre dynamique du système se traduit par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2(2m) + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + k \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \begin{Bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{Bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \Gamma^{gr} \\ \Gamma^{gr} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -2m\Gamma^{gr} \\ -m\Gamma^{gr} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

- On a donc $\mathbf{U}^* = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$, soit :

$$\boxed{\begin{Bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{Bmatrix} = -\frac{\Gamma^{gr}/\Omega_0^2}{2[1-(\omega/\Omega_0)^2]^2 - 1} \begin{Bmatrix} 3 - 2(\omega/\Omega_0)^2 \\ 4 - 2(\omega/\Omega_0)^2 \end{Bmatrix}}$$

Plan du cours

Modes de vibration

Les **vibrations libres d'un système conservatif** à n DDLs peuvent être appréhendées à partir du système matriciel suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}}$$

- **M** (**définie positive**) et **K** (**semi-définie positive**) : matrices de masse et de raideur de taille $n \times n$
- **u** : vecteur des déplacements de taille $n \times 1$

Définition

- On cherche cette fois des solutions **particulières synchrones*** **de la forme générale :**

$$\boxed{\mathbf{u} = \mathbf{X}\phi(t)}$$

- La substitution d'une solution de ce type dans l'équation du mouvement donne :

$$\ddot{\phi}(t)\mathbf{M}\mathbf{X} + \phi(t)\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K}\mathbf{X} = -\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)}\mathbf{M}\mathbf{X}$$

- La matrice **M** étant **définie positive** et la matrice **K semi-définie positive**, on a :

$$\boxed{-\frac{\ddot{\phi}(t)}{\phi(t)} = \Omega^2 = \frac{\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X}}{\mathbf{X}^T\mathbf{M}\mathbf{X}} \geq 0.}$$

* *tous les degrés de liberté sont régis par la même fonction du temps.*

Modes de vibration

Définition (suite 1)

- Les **modes de vibration** sont les solutions du **problème aux valeurs propres généralisé** suivant :

$$\boxed{\mathbf{KX} = \Omega^2 \mathbf{MX}}$$

- Solutions non nulles uniquement si

$$\boxed{\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}\right) = 0}$$

Polynome de de n en Ω^2 : n solutions.

$\Longrightarrow$ Les doublets $\boxed{\{(\Omega_i, \mathbf{X}_i)\}_{i=1,\ldots,n}}$ sont appelés **modes de vibrations**.

Modes de vibration

Définition (suite 2)

Pour la forme de $\phi(t)$, on différentie les **modes de corps rigides** des autres :

1. **Systèmes tels que** $\boxed{\mathbf{X}^T\mathbf{K}\mathbf{X} > 0 \Rightarrow \Omega^2 > 0}$ **:**

$$\boxed{\ddot{\phi}(t) + \Omega^2\phi(t) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{K}\mathbf{X} - \Omega^2\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{0}}$$

qui admet une solution non nulle $\mathbf{X}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) telle que

$$\boxed{\mathbf{K}\mathbf{X}_i - \Omega_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_i} \quad \text{et} \quad \boxed{\phi_i(t) = A_i\cos(\Omega_i t) + B_i\sin(\Omega_i t)}$$

où Ω_i est l'une des n solutions de : $\boxed{\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0}$

2. **Systèmes admettant des modes de corps rigide** $\boxed{\mathbf{X}_r}$ **avec** $\boxed{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_r = 0 \Rightarrow \Omega_r = 0}$ **($r = 1, \ldots, n$) :**

$$\boxed{\ddot{\phi}_r(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_r(t) = At + B}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{K}\mathbf{X}_r = \mathbf{0}}$$

Modes de vibration

Orthogonalité des modes de vibration

Lorsque toutes les pulsations propres $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sont distinctes, les **propriétés d'orthogonalité** se résument à :

$$\boxed{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_s = 0 \quad \text{lorsque} \quad r \neq s}$$

Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires** $\{m_i\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\{k_i\}_{i=1,\ldots,n}$ définies par :

$$\boxed{m_i = \mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \quad , \quad k_i = \mathbf{X}_i^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par

$$\boxed{\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}}$$

✎ Démonstration 2.3 – Orthogonalité des modes de vibration

Le problème aux valeurs propres est réécrit pour un mode donné $\{(\Omega_s, \mathbf{X}_s)\}$:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_s = \Omega_s^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_s$$

$$\mathbf{X}_r^T \mathbf{K}\mathbf{X}_s = \Omega_s^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M}\mathbf{X}_s \quad \text{avec} \quad r \neq s \tag{2.3}$$

Même chose avec le mode $\{(\Omega_r, \mathbf{X}_r)\}$:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{M}\mathbf{X}_r$$

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r \quad \text{avec} \quad r \neq s \tag{2.4}$$

On effectue $(2.3)^T - (2.4)$:

$$\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}^T \mathbf{X}_r - \mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_s^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}^T \mathbf{X}_r - \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r$$

Les matrices **M** et **K** sont symétriques, donc $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ et $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$ et donc :

$$\left(\Omega_r^2 - \Omega_s^2\right) \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r = 0$$

Comme $\boxed{\Omega_r \neq \Omega_s}$ on a alors $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r = 0}$

Comme $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = \Omega_r^2 \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}\mathbf{X}_r}$ on a aussi $\boxed{\mathbf{X}_s^T \mathbf{K}\mathbf{X}_r = 0}$

Modes de vibration

Définition

On appelle **modes de corps rigide** les solutions particulières du problème aux valeurs propres telles que $\boxed{\mathbf{KX} = \mathbf{0}}$, i.e. associées à des **valeurs propres nulles** $\Omega_i = 0$.

Le **nombre maximum de modes de corps rigides est de** 6 (3 translations + 3 rotations).

Normalisation des modes de vibration

Les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ sont définis à une constante près, on peut donc les **normaliser par rapport à la matrice de masse** :

$$\mathbf{Y}_i = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i}} = \frac{\mathbf{X}_i}{\sqrt{m_i}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_i = 1}$$

Quand on considère les modes $\{(\Omega_i, \mathbf{Y}_i)\}_{i=1,\dots,n}$ on a : $\boxed{m_i = 1}$ et $\boxed{\Omega_i = \sqrt{k_i}}$

Remarque

Dans la suite on suppose que les modes sont normalisés par rapport à la matrice de masse
$\Rightarrow$ Il seront quand même notés $\mathbf{X}_i$.

Lien avec un problème aux valeurs propres classique

Problème aux valeurs propres généralisé : $\boxed{\mathbf{KX} = \Omega^2\mathbf{MX}}$

On posant $\boxed{\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}}$ cela donne : $\mathbf{KX} = \Omega^2\mathbf{MX} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{KM}^{-1/2}\mathbf{Z} = \Omega^2\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{MM}^{-1/2}\mathbf{Z}$

On introduisant $\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{KM}^{-1/2}}$ et en notant que $\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{MM}^{-1/2} = (\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{1/2})(\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{-1/2}) = \mathbf{I}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}$, le problème aux valeurs propres généralisé initial devient équivalent au problème aux valeurs propres classique :

$$\boxed{\mathbf{AZ} = \lambda\mathbf{Z}}$$

associé aux mêmes valeurs propres $\lambda_i = \Omega_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Or $\mathbf{A}^T = (\mathbf{M}^{-1/2})^T\mathbf{K}^T(\mathbf{M}^{-1/2})^T = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{KM}^{-1/2} = \mathbf{A}$, donc $\mathbf{A}$ est symétrique.

La matrice $\mathbf{A}$ étant symétrique, le **théorème spectral** stipule que :

- Les valeurs propres λ_i sont réelles
- Les vecteurs propres $\mathbf{Z}_i$ forment une base orthogonale complète de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_r^T\mathbf{Z}_s &= \delta_{rs} \quad \text{(si vecteurs propres normalisés)}\\
(\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}_r^T)(\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{X}_s^T) &= \delta_{rs}\\
\mathbf{X}_r^T(\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2})\mathbf{X}_s^T &= \delta_{rs}\\
\mathbf{X}_r^T\mathbf{MX}_s^T &= \delta_{rs} \quad \text{(on retrouve le résultat précédent)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Les vecteurs propres $\mathbf{X}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ forment une **base orthogonale complète** de $\mathbb{R}^n$

Principe de décomposition modale

Objectif de la décomposition modale

Principe de la décomposition modale $\equiv$ **1 problème à n DDLs** $\Longrightarrow$ **n problèmes à 1 DDL**

Orthogonalité des modes de vibration

Mise en œuvre

- Les vecteurs propres $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ forment **une base complète de $\mathbb{R}^n$** permettant de représenter le comportement dynamique du système.

$\Longrightarrow$ Le vecteur des déplacements **u** peut être exprimé sur la base des modes de vibrations.

La **décomposition modale** s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbf{X}_i}$$

ϕ_i **: amplitudes modales** ou **coordonnées généralisées**, déterminées à partir des CIs.

Principe de décomposition modale

Remarque

Dans le cas de valeurs propres multiples (ceci inclues également les modes de corps rigide où la valeur propre correspondante est nulle) le principe de décomposition modale reste valable.

Pour cela il faut faire appel au **théorème de dégénérescence**.

Théorème de dégénerescence ([Géradin et Rixen(1994)] page 73)

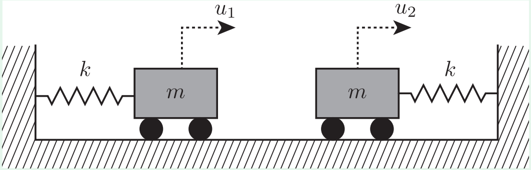
À une valeur propre Ω_p du système

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{X} = 0$$

correspond un nombre de vecteurs propres linéairement indépendants (orthogonaux les uns aux autres et orthogonaux aux vecteurs propres correspondant aux autres valeurs propres) égal à la multiplicité de la valeur propre.

Modes de vibration

Exemple de système dégénéré



$\Rightarrow$ Calcul des pulsations propres Ω

Il faut résoudre $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0$, soit

$$\begin{vmatrix} k - \Omega^2 m & 0 \\ 0 & k - \Omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(k - \Omega^2 m\right)^2 = 0$$

Les pulsations propres sont donc :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}}$$

Remarque : il n'est pas possible d'avoir un système dégénéré et couplé à 2 DDLs (possible à partir de 3 DDLs)

Exemple

Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

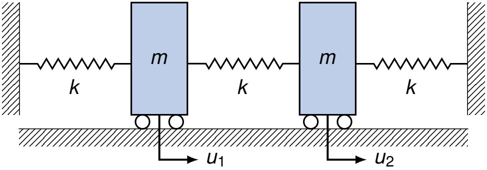


Figure 2.3- Exemple d'un système masses-ressorts à 2 DDLs.

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = 0 \end{cases}}$$

Puis sous forme matricielle :

$$\boxed{\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

avec : **M : matrice de masse** et **K : matrice de raideur**

Exemple

Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Les modes propres de vibration du système

- Les **pulsations propres** et **vecteurs propres** sont :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad ; \quad \Omega_1^2 = \frac{3k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

  - **Mode 1 :** les masses oscillent **en phase à la pulsation Ω_1**
  - **Mode 2 :** les masses oscillent **en opposition de phase à la pulsation Ω_2**

- Les coordonnées généralisée sont données par :

$$\boxed{\phi_i(t) = A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)} \quad \text{avec ici} \quad i = 1, 2$$

- Solution générale (mouvement quelconque) = combinaison linéaire de ces deux modes :

$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbf{X}_i = \underbrace{\big(A_1 \cos(\Omega_1 t) + B_1 \sin(\Omega_1 t)\big)\mathbf{X}_1}_{\text{Mode 1}} + \underbrace{\big(A_2 \cos(\Omega_2 t) + B_2 \sin(\Omega_2 t)\big)\mathbf{X}_2}_{\text{Mode 2}}}$$

Les constantes A_1, B_1, A_2 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales $u_1(t=0)$, $\dot{u}_1(t=0)$, $u_2(t=0)$ et $\dot{u}_2(t=0)$ (4 équations pour 4 inconnues, ça marche !).

✎ Démonstration 2.3

Soit le problème aux valeurs propres :

$$\boxed{\mathbf{KX} = \Omega^2 \mathbf{MX}}$$

⟹ **Calcul des pulsations propres Ω**

Il faut résoudre $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0$, soit

$$\begin{vmatrix} 2k - \Omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \Omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(2k - \Omega^2 m\right)^2 - k^2 = 0$$

$$\left(2k - \Omega^2 m + k\right)\left(2k - \Omega^2 m - k\right) = 0$$

$$\left(3k - \Omega^2 m\right)\left(k - \Omega^2 m\right) = 0$$

Les pulsations propres sont donc :

$$\boxed{\Omega_1^2 = \frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega_2^2 = \frac{3k}{m}}$$

✎ Démonstration 2.4

⟹ Calcul des vecteurs propres X

Il y a 2 pulsations propres et donc 2 vecteurs propres

$$\mathbf{X}_1 = \{X_{11}, X_{12}\}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_2 = \{X_{21}, X_{22}\}^T$$

On commence par déterminer $\mathbf{X}_1$ pour cela il faut résoudre :

$$\left(\mathbf{K} - \Omega_1^2\mathbf{M}\right)\mathbf{X}_1 = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \left(2k - \Omega_1^2 m\right)X_{11} - kX_{12} = 0 \\ -kX_{11} + \left(2k - \Omega_1^2 m\right)X_{12} = 0 \end{cases}$$

Comme $\det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) = 0$, on peut résoudre avec une des 2 équations. On prend la 1ère :

$$\left(2k - \Omega_1^2 m\right)X_{11} - kX_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad kX_{11} - kX_{12} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{11} = X_{12}}$$

⟹ Les masses oscillent **en phase**

On fait de même pour $\mathbf{X}_2$ et on trouve :

$$\left(2k - \Omega_2^2 m\right)X_{21} - kX_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad -kX_{21} - kX_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_{21} = -X_{22}}$$

⟹ Les masses oscillent **en opposition de phase**

Si on prend arbitrairement $X_{11} = 1$ et X_{21}, on a finalement : $\boxed{\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$

✎ Démonstration 2.4

On a montré que :

$$\boxed{\phi_i(t) = A_i \cos(\Omega_i t) + B_i \sin(\Omega_i t)} \quad \text{avec ici} \quad i = 1, 2$$

La **décomposition modale** s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \mathbf{X}_i}$$

On écrit donc finalement :

$$\boxed{\mathbf{u} = (A_1 \cos(\Omega_1 t) + B_1 \sin(\Omega_1 t))\,\mathbf{X}_1 + (A_2 \cos(\Omega_2 t) + B_2 \sin(\Omega_2 t))\,\mathbf{X}_2}$$

où les constantes A_1, B_1, A_2 et B_2 sont déterminées à partir des conditions initiales :

$u_1(t = 0)$, $\dot{u}_1(t = 0)$, $u_2(t = 0)$ et $\dot{u}_2(t = 0)$ (4 équations pour 4 inconnues, ça marche !).

Exemple

Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 1 : conditions initiales sur le mode 1

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$

- Le système s'écrit :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= A_1\cos(\Omega_1 t) + B_1\sin(\Omega_1 t) + A_2\cos(\Omega_2 t) + B_2\sin(\Omega_2 t)\\
u_2 &= A_1\cos(\Omega_1 t) + B_1\sin(\Omega_1 t) - A_2\cos(\Omega_2 t) - B_2\sin(\Omega_2 t)\\
\dot{u}_1 &= -\Omega_1 A_1\sin(\Omega_1 t) + \Omega_1 B_1\cos(\Omega_1 t) - \Omega_2 A_2\sin(\Omega_2 t) + \Omega_2 B_2\cos(\Omega_2 t)\\
\dot{u}_2 &= -\Omega_1 A_1\sin(\Omega_1 t) + \Omega_1 B_1\cos(\Omega_1 t) + \Omega_2 A_2\sin(\Omega_2 t) - \Omega_2 B_2\cos(\Omega_2 t)
\end{aligned}
$$

- Application des conditions initiales :

$$
\dot{u}_1(t=0)=0\ ;\ \dot{u}_2(t=0)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\Omega_1 B_1 + \Omega_2 B_2 &= 0\\ \Omega_1 B_1 - \Omega_2 B_2 &= 0\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_1 = B_2 = 0}
$$

$$
u_1(t=0)=1\ ;\ u_2(t=0)=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}A_1 + A_2 &= 1\\ A_1 - A_2 &= 1\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_2 = 0} \quad \boxed{A_1 = 1}
$$

- Finalement, **seul un mouvement sur le mode 1 est observé** :

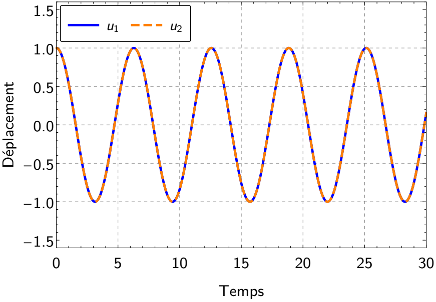
$$
\boxed{\begin{aligned}u_1 &= \cos(\Omega_1 t)\\ u_2 &= \cos(\Omega_1 t)\end{aligned}}
$$

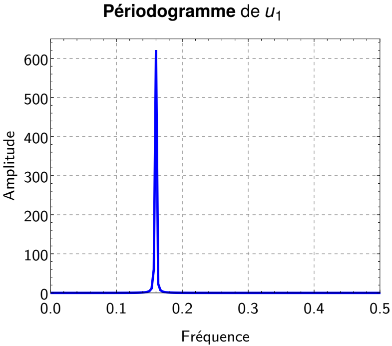
Exemple

Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 1 : conditions initiales sur le mode 1

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



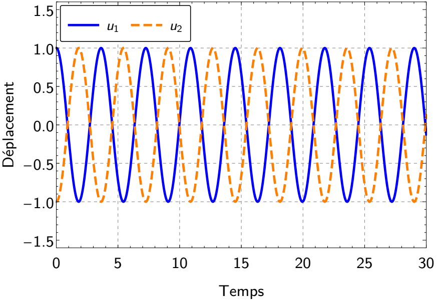


Exemple

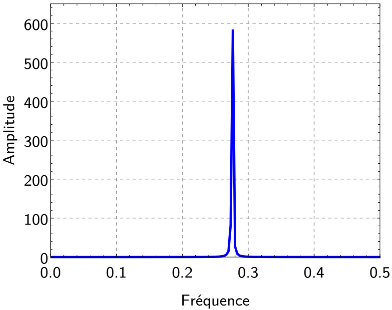
Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 2 : conditions initiales sur le mode 2

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=0}$, $\boxed{u_2(t=0)=-1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



Périodogramme de u_1

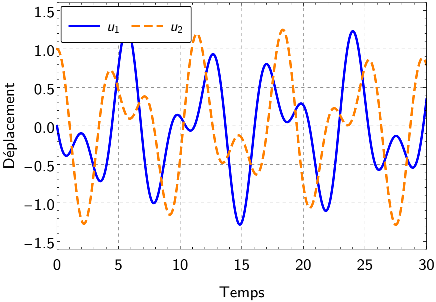


Exemple

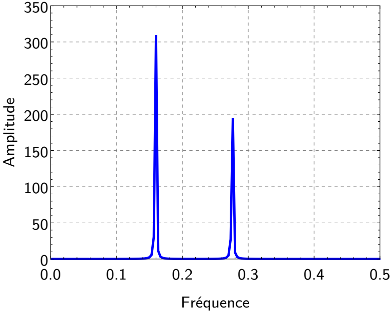
Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 3 : conditions initiales quelconques (exemple 1)

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=0}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=-1}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=0}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



Périodogramme de u_1

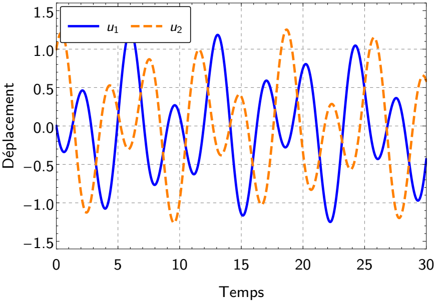


Exemple

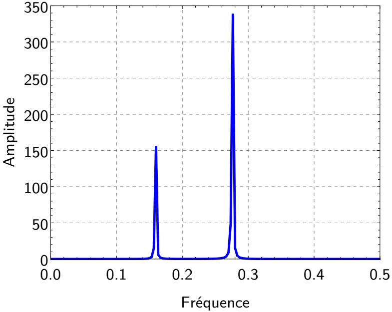
Cas d'un système symétrique 2 masses - 3 ressorts

Cas 4 : conditions initiales quelconques (exemple 2)

- **Condition initiales :** $\boxed{u_1(t=0)=0}$, $\boxed{\dot{u}_1(t=0)=-1}$, $\boxed{u_2(t=0)=1}$, $\boxed{\dot{u}_2(t=0)=1}$
- **Paramètres :** $k=1$ et $m=1$
- **Fréquence propres :** $\boxed{f_1=\Omega_1/2\pi\approx 0,16}$ et $\boxed{f_2=\Omega_2/2\pi\approx 0,28}$



Périodogramme de u_1



Généralisation

Cas des systèmes à 2 DDLs arbitraires

Équations du mouvement

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Remarque : dans le cadre de ce cours les matrice de masse **M** et deux raideur **K** sont toutes les deux symétriques.

Pulsations et vecteurs propres

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11} \pm \sqrt{(M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11})^2 - 4M_{11}M_{22}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)}}{2M_{11}M_{22}}$$

$$\mathbf{X}_{1,2} = \begin{Bmatrix} (K_{22} - \Omega_{1,2}^2 M_{22})/(-K_{12}) \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Généralisation

Cas des systèmes à 2 DDLs arbitraires

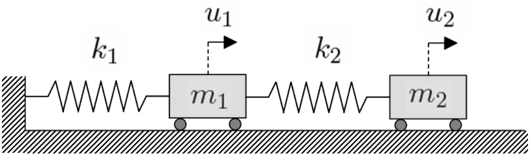


Figure 2.4- Autre exemple de système masses-ressorts à 2 DDLs.

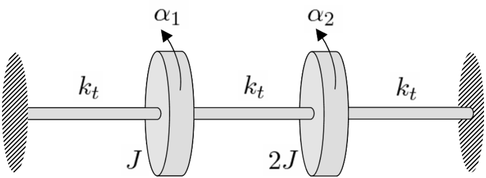


Figure 2.5- Autre exemple de système 2 DDLs, composé de disques rigides massifs et d'arbres de torsion sans masses.

Les exemples des Figures 2.3 et 2.4 sont traités en TD.

Cas des systèmes dissipatifs

- Système matricielle décrivant les vibrations libres d'un système conservatif à n DDLs

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}}$$

$\mathbf{u}_0$ et $\dot{\mathbf{u}}_0$: vecteurs de taille $n \times 1$ exprimant les conditions initiales.

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\phi}_i + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}\mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases}}$$

- La solution de chacune des n équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\boxed{\phi_i = \phi_{i0}\cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i}\sin(\Omega_i t)}$$

✎ Démonstration 2.5 – Projection sur la base des vecteurs propres

On écrit les équations du mouvement en remplaçant **u** par sa décomposition modale :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = m_i = 1 \text{ si } r = i}} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = k_i = \Omega_i^2 \text{ si } r = i}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\ddot{\phi}_i + \Omega_i^2\phi_i = 0, \qquad i = 1,\ldots,n}$$

Pour les conditions initiales, si les modes sont normalisés par rapport à **M**, on a :

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{n}\phi_{i0}\mathbf{X}_i \Leftrightarrow \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{n}\phi_{i0}\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \Leftrightarrow \boxed{\phi_{i0} = \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_{i0}\mathbf{X}_i \Leftrightarrow \mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0 = \sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_{i0}\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i \Leftrightarrow \boxed{\dot{\phi}_{i0} = \mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Équations du mouvement dans le cas dissipatif

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}}$$

Amortissement de Rayleigh

Matrice d'amortissement **proportionnelle à la matrice de masse et de rigidité** :

$$\boxed{\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}}$$

$\Longrightarrow$ Orthogonalité des formes propres $\mathbf{X}_i$ également vérifiée vis-à-vis de $\mathbf{C}$.

Remarque

Dans chacune des applications qui suivent les **décompositions modales sont effectuées sur les modes du système libre sans amortissement**.

Cas des systèmes dissipatifs

Calcul des vibrations libres

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i\Omega_i\dot{\phi}_i + \Omega_i^2\phi_i = 0 \qquad i = 1,\dots,n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases}}$$

ζ_i : **taux d'amortissements modaux**, définis tels que : $\boxed{\zeta_i = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i\right)}$

- La solution de chacune des n équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\boxed{\phi_i = e^{-\zeta_i\Omega_i t}\left[\phi_{i0}\cos(\Omega_{id}t) + \frac{\zeta_i\Omega_{id}\phi_{i0} + \dot{\phi}_{i0}}{\Omega_{id}}\sin(\Omega_{id}t)\right] \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega_{id} = \Omega_i\sqrt{1-\zeta_i^2}}}$$

✎ Démonstration 2.6 – Projection sur la base des vecteurs propres

On doit résoudre, par décomposition modale, le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

$$\underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = c_i \text{ si } r=i}} = a \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = 1 \text{ si } r=i}} + b \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i \\ = \Omega_i^2 \text{ si } r=i}}$$

Le **coefficient d'amortissement modal** et le **taux d'amortissement modal** sont donc :

$$\boxed{c_i = a + b\Omega_i^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\zeta_i = \frac{c_i}{2\Omega_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\Omega_i} + b\Omega_i\right)}$$

✎ Démonstration 2.6 – Projection sur la base des vecteurs propres

Pour résoudre le problème on va décomposé le vecteur **u** sur **la base des modes propres du système homogène et sans amortissement associé** :

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(\mathbf{M}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{C}\sum_{i=1}^{n}\dot{\phi}_i\mathbf{X}_i + \mathbf{K}\sum_{i=1}^{n}\phi_i\mathbf{X}_i\right) = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =1 \text{ si } r=i}} + \dot{\phi}_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =c_i \text{ si } r=i}} + \phi_i \underbrace{\mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i}_{\substack{=0 \text{ si } r\neq i\\ =\Omega_i^2 \text{ si } r=i}}\right) = \mathbf{0}$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + 2\zeta_i\Omega_i\dot{\phi} + \Omega_i^2\phi = 0, \qquad i = 1,\ldots,n}$$

Les conditions initiales se traitent comme dans le cas sans amortissement.

Finalement le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\begin{cases} \ddot{\phi}_i + 2\zeta_i\Omega_i\dot{\phi}_i + \Omega_i^2\phi_i = 0 \qquad i = 1,\ldots,n \\ \phi_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{u}_0}_{\phi_{j0}} \quad , \quad \dot{\phi}_i(t=0) = \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\phi}_{j0}} \end{cases}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Calcul de la réponse forcée harmonique

- Oscillations **forcées d'un système à n DDLs avec amortissements visqueux, soumis à des forces harmoniques**, décrites par les équations du mouvement suivantes :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

- La **solution stationnaire** recherchée sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}}$

  $\Longrightarrow$ Le problème consiste alors à **identifier le vecteur des amplitudes complexes $\hat{\mathbf{U}}$**

- Décomposition modale $\Rightarrow$ $\hat{\mathbf{U}} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i$ + orthogonalité des formes propres $\mathbf{X}_i$:

$$\boxed{\phi_i = \frac{F_i/k_i}{1-(\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad F_i = \mathbf{X}_i^T\mathbf{F} \qquad i = 1, \ldots, n}$$

  où les termes F_i sont appelés **forces modales**.

Remarque

Les amplitudes modales sont maintenant fonctions de la pulsation de forçage ω

✎ Démonstration 2.7

On doit résoudre, par décomposition modale, l'équation suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}\cos(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{M}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{F}e^{j\omega t}}$$

On cherche une solution stationnaire sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{U}}e^{j\omega t}}$ qui est introduite dans l'équation du mouvement. Ce qui donne :

$$\boxed{\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{F}}$$

Pour résoudre le problème on va décomposé le vecteur d'amplitudes complexes $\hat{\mathbf{U}}$ sur l**a base des modes propres du système homogène et sans amortissement associé** en posant :

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i}$$

✎ Démonstration 2.7

On obtient :

$$\left(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \sum_i^n \phi_i \mathbf{X}_i = \mathbf{F}$$

$$\mathbf{X}_r^T \left(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}\right) \sum_i^n \phi_i \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_r^T \mathbf{F}$$

$$\sum_i^n \left(-\omega^2 \mathbf{X}_r^T \mathbf{M} \mathbf{X}_i + j\omega \mathbf{X}_r^T \mathbf{C} \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_r^T \mathbf{K} \mathbf{X}_i\right) \phi_i = \mathbf{X}_r^T \mathbf{F}$$

$$\boxed{\left(-\omega^2 + c_i j\omega + \Omega_i^2\right) \phi_i = F_i, \qquad i = 1, \ldots, n}$$

En divisant par Ω_i^2, le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\phi_i = \frac{F_i/\Omega_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i \omega/\Omega_i} = \frac{F_i/k_i}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i \omega/\Omega_i} = U_i^{\text{st}} A_{\omega,i} = U_i^{\text{st}} \beta_i e^{-j\varphi_i}$$

Finalement la réponse stationnaire s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{u} = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{u}}\right] = \text{Re}\left[\hat{\mathbf{U}} e^{j\omega t}\right] = \sum_i^n \text{Re}\left[U_i^{\text{st}} \beta_i e^{j(\omega t - \varphi_i)}\right] \mathbf{X}_i = \sum_i^n U_i^{\text{st}} \beta_i \cos(\omega t - \varphi_i) \mathbf{X}_i}$$

Cas des systèmes dissipatifs

Calcul de la réponse forcée harmonique

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}} = \sum_i^n \phi_i(\omega)\mathbf{X}_i = \sum_i^n \frac{F_i/k_i}{1-(\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i}\mathbf{X}_i}$$

Hypothèse : au niveau de la résonance du i-ième mode on a $\hat{\mathbf{U}} \approx \phi_i(\omega)\mathbf{X}_i$

$\Rightarrow$ Expressions analytiques approchées :

- De la **pulsations de résonance** :

$$\omega_i^{re} = \Omega_i\sqrt{1-2\zeta_i^2} \qquad i = 1, \ldots, n$$

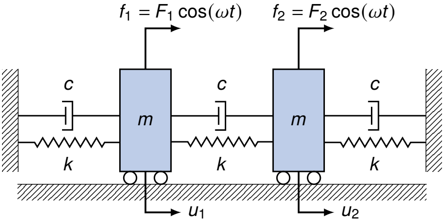
- Du maximums de l'**amplitude de chaque pic**. Pour la i-ième composante de $\hat{\mathbf{U}}$ on a :

$$|\hat{U}_k|_{\max} \approx |\phi_i(\omega_i^{re})X_i| = \frac{F_i/k_i}{2\zeta_i\sqrt{1-\zeta_i^2}}|X_i| \qquad i = 1, \ldots, n$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Cas des systèmes dissipatifs

Calcul de la réponse forcée harmonique



Pulsations propres normalisés :

$$\Omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \Omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

Vecteurs propres nomralisés :

$$\mathbf{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

L'analyse modale conduit à :

$$k_i = \Omega_i^2, \quad c_1 = \frac{c}{m}, \quad c_2 = \frac{3c}{m}, \quad \zeta_i = \frac{1}{2}\frac{c_i}{\Omega_i}, \quad \phi_i = \frac{F_i/\Omega_i}{1-(\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad (i = 1, 2)$$

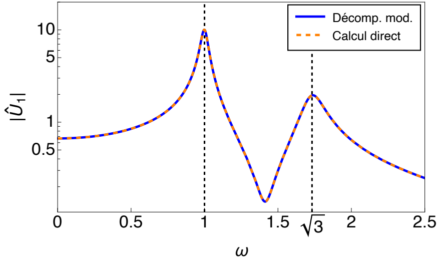
$$\boxed{\hat{U}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\phi_1 + \phi_2) = \frac{(2F_1+F_2)\,k - F_1 m\omega^2 + jc\,(2F_1+F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

$$\boxed{\hat{U}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{(F_1+2F_2)\,k - F_2 m\omega^2 + jc\,(F_1+2F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)}}$$

Travail personnel : démontrer les résultats précédents.

Cas des systèmes dissipatifs

Calcul de la réponse forcée harmonique

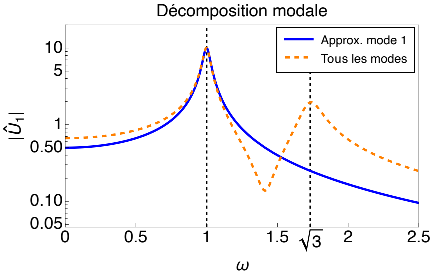


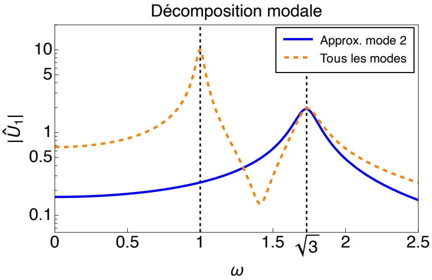
Approximation à la **résonance du mode 1** :

$$\hat{U}_1 \approx \frac{\phi_1}{\sqrt{2m}}, \quad \hat{U}_2 \approx \frac{\phi_1}{\sqrt{2m}}$$

Approximation à la **résonance du mode 2** :

$$\hat{U}_1 \approx \frac{\phi_2}{\sqrt{2m}}, \quad \hat{U}_2 \approx -\frac{\phi_2}{\sqrt{2m}}$$





Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Équations du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{gr}} + \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

où $\mathbf{K}_{IF}$ et $\mathbf{C}_{IF}$ représentent des matrices de raideur et d'amortissement, de taille $n \times n_f$ avec :

- n : nombre de DDLs internes ne comprenant pas les DDLs de frontières
- n_f : nombre de DDLs de frontière :

Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports

Équations du mouvement

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{gr}} + \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

où $\mathbf{K}_{IF}$ et $\mathbf{C}_{IF}$ représentent des matrices de raideur et d'amortissement, de taille $n \times n_f$ avec :

- n : nombre de DDLs internes ne comprenant pas les DDLs de frontières
- n_f : nombre de DDLs de frontière :

Définition

On note $\mathbf{u}^{\mathrm{st}}$ le vecteur des **déplacements statiques** défini par

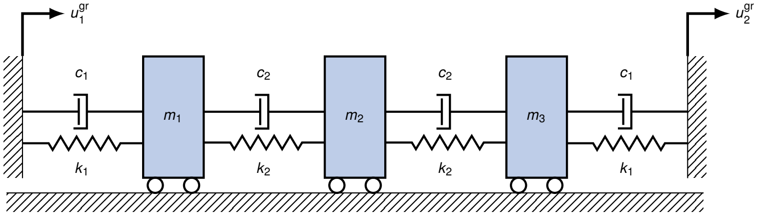
$$\boxed{\mathbf{u}^{\mathrm{st}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

Le problème est traité en termes de **déplacement relatif** en considérant le vecteur $\mathbf{u}^*$:

$$\boxed{\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{st}}}$$

✎ Démonstration 2.8

Soit le système suivant, à 5 DDLs dont 2 de frontière (i.e. $n = 3$ et $n_f = 2$) :



Les équations du mouvement, sous forme matricielle, sont :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & 2c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & 2k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1^{gr} \\ \dot{u}_2^{gr} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{gr} \\ u_2^{gr} \end{Bmatrix}$$

ou encore

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} + \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}}$$

Cas d'un excitation par mouvement du support

Proposition

Lorsque la matrice d'amortissement **C est proportionnelle à la matrice de raideur K** – c'est-à-dire lorsque $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$ – le vecteur $\mathbf{u}^*$ s'obtient par résolution du problème matriciel suivant :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{\mathrm{st}}.}$$

où

$$\boxed{\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{st}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathbf{u}^{\mathrm{st}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{\mathrm{gr}}}$$

✎ Démonstration 2.9

On s'intéresse au déplacement relatif :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{st} \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}^{st} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}$$

On reprend l'équation du mouvement avec $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= \mathbf{C}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} + \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr} \\
\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + b\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} &= b\mathbf{K}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} + \mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr} \\
&= \mathbf{K}\left(b\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\dot{\mathbf{u}}^{gr} + \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}_{IF}\mathbf{u}^{gr}\right) \\
&= \mathbf{K}\left(b\dot{\mathbf{u}}^{st} + \mathbf{u}^{st}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{st}\right) + \mathbf{K}\left(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{st}\right) = \mathbf{0}$$

Au final, on obtient bien :

$$\boxed{\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^* + \mathbf{K}\mathbf{u}^* = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{st}}$$

Cas d'un excitation par mouvement du support

Amplitudes modales

- Mouvement induit par des déplacements harmoniques $\boxed{\hat{\mathbf{u}}^{\text{st}} = \hat{\mathbf{U}}^{\text{st}} e^{j\omega t}}$, imposés aux supports,
- Solution recherchée sous la forme $\boxed{\hat{\mathbf{u}}^{*} = \hat{\mathbf{U}}^{*} e^{j\omega t}}$.
- En appliquant le principe de décomposition, en posant :

$$\boxed{\hat{\mathbf{U}}^{*} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i}$$

on obtient finalement les expression des amplitudes modales ϕ_i

$$\boxed{\phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \hat{U}_i^{\text{st}}}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i \omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad \hat{U}_i^{\text{st}} = \mathbf{X}_i^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{U}}^{\text{st}} \qquad i = 1, \ldots, n}$$

✎ Démonstration 2.10

En introduisant $\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{st}} = \hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}} e^{j\omega t}$ et $\hat{\mathbf{u}}^{*} = \hat{\mathbf{U}}^{*} e^{j\omega t}$ dans $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{*} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{*} + \mathbf{K}\mathbf{u}^{*} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^{\mathrm{st}}$ on obtient :

$$\boxed{\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\hat{\mathbf{U}}^{*} = \omega^2\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}}}$$

Puis en introduisant $\hat{\mathbf{U}}^{*} = \sum_i \phi_i \mathbf{X}_i$ dans cette dernière on obtient :

$$\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i = \omega^2\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}}$$

$$\mathbf{X}_r^T\left(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\sum_i^n \phi_i\mathbf{X}_i = \omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}}$$

$$\sum_i^n\left(-\omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i + j\omega\mathbf{X}_r^T\mathbf{C}\mathbf{X}_i + \mathbf{X}_r^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i\right)\phi_i = \omega^2\mathbf{X}_r^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}}$$

$$\boxed{\left(-\omega^2 + 2j\zeta_i\omega\Omega_i + \Omega_i^2\right)\phi_i = \omega^2\hat{U}_i^{\mathrm{st}}, \qquad i = 1, \ldots, n}$$

En divisant par Ω_i^2, le problème de dimension n initial est équivalent aux n sous-problèmes suivants :

$$\phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2\hat{U}_i^{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\Omega_i)^2 + 2j\zeta_i\omega/\Omega_i} \quad \text{où} \quad \hat{U}_i^{\mathrm{st}} = \mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\hat{\mathbf{U}}^{\mathrm{st}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Cas d'un excitation par mouvement du support

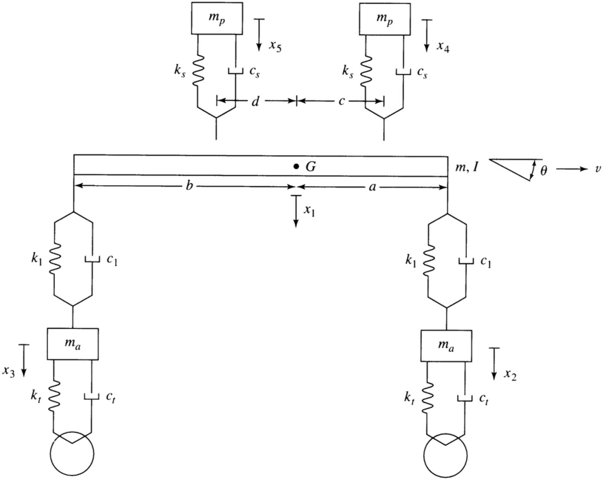


Figure 2.6- Modèle simplifie d'un véhicule automobile (étudié en TP sur Matlab).

- Ferdinand P. Beer : *Mechanics of materials*. McGraw-Hill, New York, 6th ed édition, 2011. ISBN 978-0-07-338028-5.
- Paolo L. Gatti : *Applied Structural and Mechanical Vibrations : Theory, Methods*. CRC Press, Taylor & Francis Group, deuxième édition, 2014.
- M. Géradin et D. Rixen : *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, Paris, 1994.
- James M. Gere et Barry J. Goodno : *Mechanics of Materials*. Global Engineering, brief édition, 2012.
- K. G. Graff : *Wave Motion in Elastic Solids*. London, Oxford University Press, 1991.
- G. Kelly : *Mechanical Vibrations, Theory and Applications*. McGraw-Hill, deuxième édition, 2000.
- G. Kelly : *Green's functions with applications*. Chapman & Hall/CRC, deuxième édition, 2015.
- J. C Pascal : *Vibration et acoustique*. Polycopié de cours de l'ENSIM, Le Mans, 2008.
- Singiresu S. Rao : *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2nd édition, 2019.
- S. Timoshenko, D. H. Young et Weaver W. : *Vibration Problem in Engineering*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.