

# Vibrations des structures 2

## Vibrations des systèmes continus

**Baptiste Bergeot**

Maître de Conférences - [baptiste.bergeot@insa-cvl.fr](mailto:baptiste.bergeot@insa-cvl.fr) - bureau D03

---

4A INSA Centre Val de Loire  
Génie des Systèmes Industriels (GSI)



# Plan du cours

**Chapitre 1 – Introduction**

**Chapitre 2 – Vibrations longitudinales des barres**

**Chapitre 3 – Vibrations transversales des poutres**

**Bibliographie**

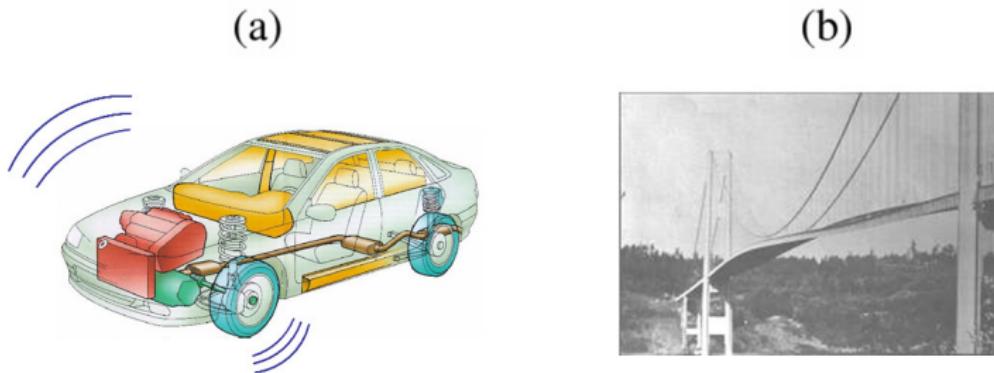
# Plan du cours

**Chapitre 1 – Introduction**

Chapitre 2 – Vibrations longitudinales des barres

Chapitre 3 – Vibrations transversales des poutres

Bibliographie



**Figure 1.1-** Exemples de problématiques industrielles : (a) vibrations d'une automobile générant du bruit ; (b) instabilité aéroélastique du pont de Tacoma (avant destruction !).

# Cadre du cours

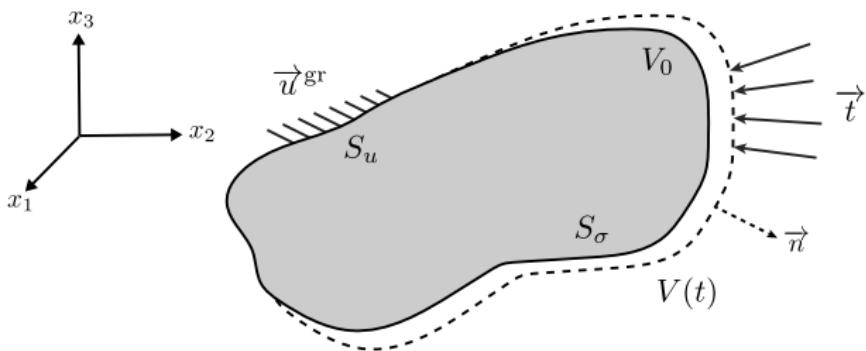
## Hypothèse de petites perturbations

Le cadre des **petites perturbations** sera admis tout au long de ce cours, dans ce sens que les hypothèses suivantes, appelées **hypothèses de petites perturbations (HPP)**, seront admises :

- Les **systèmes étudiés sont linéaires**, sous entendu que les déplacements engendrés par différentes sources d'excitation sont cumulables (**principe de superposition**).
- Les champs mécaniques et cinématiques des systèmes déformés sont étudiés par rapport à leurs **configurations de référence** (positions d'équilibre statique), sous entendu qu'il n'y a pas de distinction entre variables eulériennes et lagrangiennes ; cela signifie que les déplacements sont petits par rapport aux dimensions des systèmes étudiés ( $\approx$  **pas de mouvement moyen**).

## Vibrations des systèmes élastiques continus

- À « haute fréquence » l'approche masses-ressorts-amortisseurs n'est plus valide  
« haute fréquence » = Longueurs d'ondes deviennent du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques des sous-structures étudiées
- ⇒ Chaque sous-structure est considérée comme un système continu avec un comportement dynamique propre « multi-DDLs ».
- ⇒ La description de chaque sous-structure requiert de prendre en compte, à l'échelle locale, ses propriétés inertielles et élastiques. (**Mécanique des milieux continus**)



**Figure 1.2-** Illustration d'un domaine élastique  $V$  de surface  $S = S_u + S_\sigma$ .

## Équations du mouvement (cf. [Gérardin et Rixen(1994)])

Dans le cadre des petites perturbations (HPP), le **problème aux limites** permettant de décrire le comportement vibratoire du système s'exprime :

**PFD**      
$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

**Condition aux limites**      
$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j = t_i \quad \text{sur } S_\sigma$$

$$u_i = u_i^{\text{gr}} \quad \text{sur } S_u$$

Ces équation traduisent respectivement les équations d'équilibre local du système (PFD), dans les trois directions de l'espace ( $i = 1, 2, 3$ ), et les conditions aux limites.

### Hypothèses MMC dans le cas des barres/poutres

- **Hypothèse de Navier** : les sections restent planes ;
- **Hypothèse de Bernoulli** : les sections restent perpendiculaires à la fibre neutre ;
- **Principe de St Venant** : les contraintes (et déformations) dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que de la résultante et du moment résultant (au centre de gravité de la section) associés à ce système de forces.

# Plan du cours

Chapitre 1 – Introduction

**Chapitre 2 – Vibrations longitudinales des barres**

Chapitre 3 – Vibrations transversales des poutres

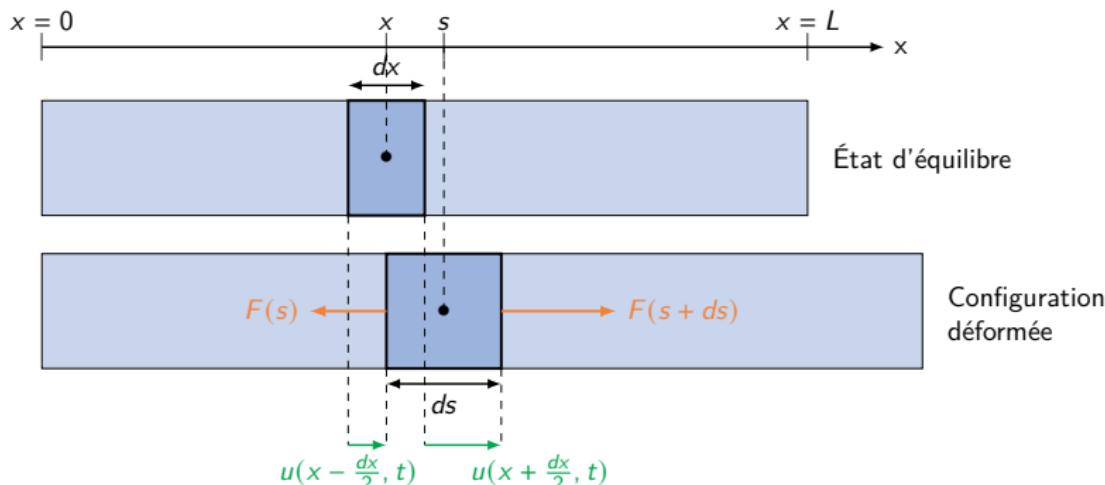
Bibliographie

# Vibrations libres et modes de vibrations

## Problème étudié

⇒ Vibrations libres d'une barre prismatique droite, homogène et non amortie.

- **Caractéristiques matérielles et géométriques :** densité  $\rho$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ], module d'Young  $E$  [ $\text{Pa}$ ], section  $S$  [ $\text{m}^2$ ], longueur  $L$  [ $\text{m}$ ].
- $x$  ( $x \in [0, L]$ ) : abscisse permettant de repérer un point (ou section) le long de la barre.



**Figure 2.3-** Illustration d'une barre en traction-compression et équilibre dynamique d'un tronçon de longueur élémentaire  $dx$ .

# Vibrations libres et modes de vibrations

## Équations du mouvement

À la position  $x$ , l'équation du mouvement du système s'exprime alors par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[$$

$u = u(t, x)$  : **déplacement longitudinal de la section.**

## Solutions stationnaires harmoniques

- On considère les solutions **particulières synchrones**\* (sinusoïdales) de même pulsation  $\Omega$  du problème en posant  $u(x, t) = X(x) \cos(\Omega t)$  **(solution à variables séparées)**
- Équation à résoudre :  $\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \quad x \in ]0, L[$  où  $\beta = \Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$

$\beta$  : **nombre d'onde** et  $\lambda = 2\pi/\beta$  : **longueur d'onde**

- Solution :  $X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \quad x \in [0, L]$

$A$  et  $B$  : constantes déterminées à partir des **conditions aux limites** et par **normalisation**.

## Démonstration 2.1

Le PFD est écrit pour l'élément de barre :

$$dm \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(s + \frac{ds}{2}) - F(s - \frac{ds}{2})$$

$$\rho S ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(s) + F'(s) \frac{ds}{2} - F(s) + F'(s) \frac{ds}{2} = F'(s) ds$$

En écrivant  $F = \sigma S$  avec

$$F'(s) = F'(x + u(x, t, )) = F'(x) + u(x, t, )F''(x) \approx F'(x)$$

et en utilisant la loi de Hooke  $\sigma = E \epsilon$  avec

$$\epsilon = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{dx + u(x + \frac{dx}{2}, t) - u(x - \frac{dx}{2}, t) - dx}{dx} = \frac{u(x, t) + \frac{dx}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - u(x, t) + \frac{dx}{2} \frac{\partial u}{\partial x}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

dans le cas d'une **traction pure** (cf. cours MMC 3A GSI, INSA CVL) et on a :

$$\rho S ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ds$$

et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[$$

### Remarque

Les valeurs de  $u(x, t)$  en  $x = 0$  et  $x = L$  sont imposées par les conditions aux limites.

## Démonstration 2.1

On cherche les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation  $\Omega$ ) du problème en posant

$u(x, t) = X(x) \cos(\Omega t)$  qui est introduit dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} \cos(\Omega t) + \frac{\rho}{E} \Omega^2 X \cos(\Omega t) = 0$$

et donc

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \beta^2 X = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta = \Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

L'équation précédent est celle d'un oscillateur harmonique spatial, le nombre d'onde  $\beta$  est la « pulsation spatiale ». La solution est donc de la forme :

$$X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \quad x \in [0, L]$$

# Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont définies en considérant les 2 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion :

- le déplacement longitudinal :  $u(x, t)$  ;
- la contrainte longitudinale :  $\sigma = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$

## Définition

Une **condition aux limites homogène** consiste à annuler l'une de ses grandeurs.

# Barre libre-libre

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$X_i = A \cos(\beta_i x) \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad i \geq 0$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\Omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad i \geq 0$$

### Remarque

Dans ce cas, la solution obtenue lorsque  $i = 0$  (c'est-à-dire pour  $\Omega_0 = 0$  et  $X_0 = A$ ) correspond au *mode de corps rigide* (translation selon  $x$ ) du système.

## Démonstration 2.2 - Barre libre-libre

Si la barre est **libre** en l'une de ses extrémités c'est que cette dernière **ne subit aucune contrainte**. Comme la loi de Hooke pour une barre en traction s'écrit :

$$\sigma = E\epsilon = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \frac{dX}{dx} \cos(\Omega t)$$

on a donc pour une **barre libre-libre** :

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \sin(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = i\pi \quad \Rightarrow \quad \beta_i = i \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \Omega_i = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (i \geq 0)$$

et donc finalement :

$$u(x, t) = A \cos(\beta_i x) \cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 0$$

À chaque position  $x$  le déplacement  $u$  oscille à la pulsation  $\Omega_i$  avec une amplitude  $A \cos(\beta_i x)$

# Barre libre-libre

## Déformées modales

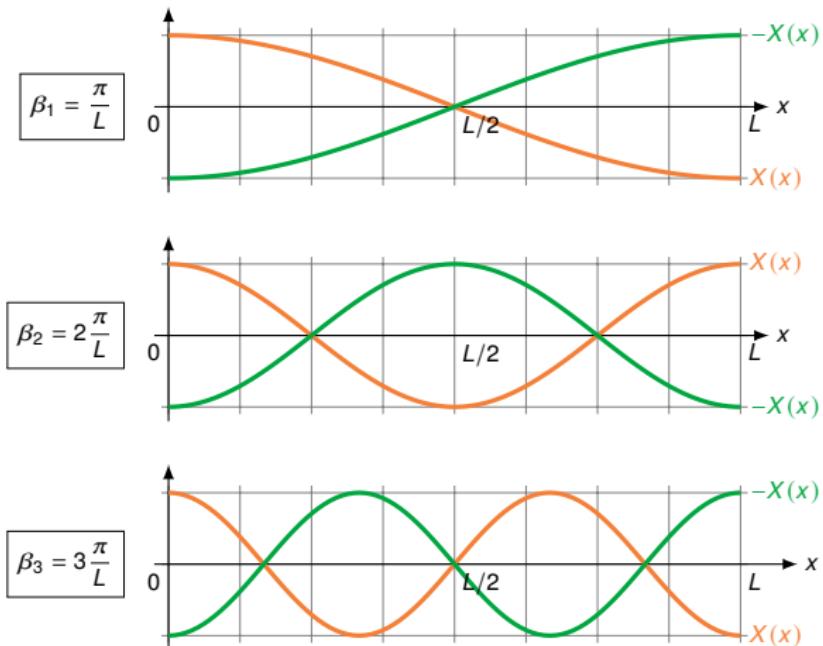


Figure 2.4- Évolution spatiale des déformées modales  $\{X_i\}_{i=1,2,3}$  pour une barre libre-libre.

# Barre encastrée-libre

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$X_i = B \sin(\beta_i x) \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \quad i \geq 1$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad i \geq 1$$

## Démonstration 2.2 - Barre encastrée-libre

Si la barre est **encastrée** en l'une de ses extrémités c'est que cette dernière **ne subit aucun déplacement**. On a donc pour une **barre encastrée-libre** :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\left. \frac{dX}{dx} \right|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad B \cos(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = \frac{(2i-1)\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \quad \text{et} \quad \Omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (i \geq 1)$$

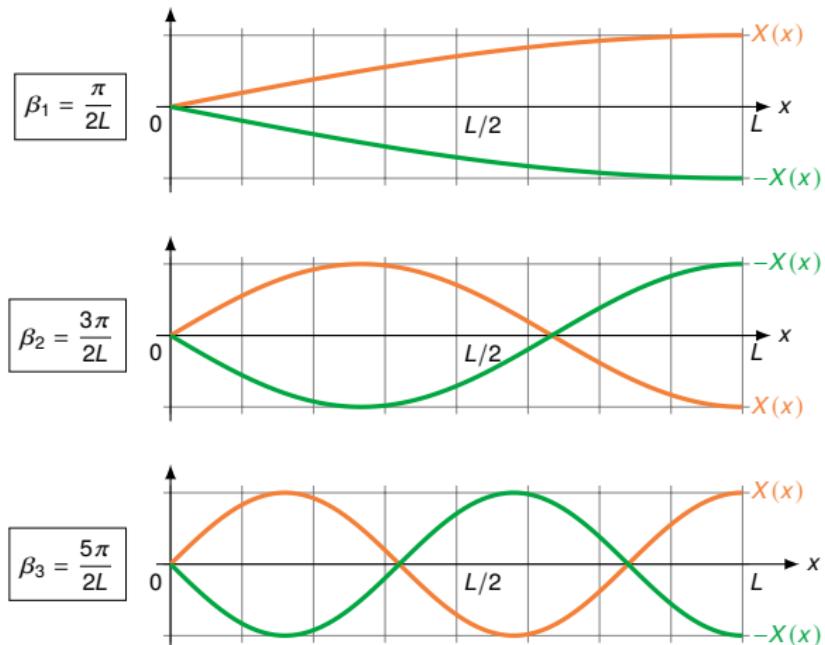
et donc finalement :

$$u(x, t) = B \sin(\beta_i x) \cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 1$$

À chaque position  $x$  le déplacement  $u$  oscille à la pulsation  $\Omega_i$  avec une amplitude  $B \sin(\beta_i x)$

# Barre encastrée-libre

## Déformées modales



# Barre encastrée-encastrée

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X|_{x=L} = 0$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$X_i = B \sin(\beta_i x) \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad i \geq 1$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\Omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad i \geq 1$$

## Démonstration 2.2 - Barre encastrée-encastrée

On a donc pour une **barre encastrée-encastrée** :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X|_{x=L} = 0$$

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$X|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad B \sin(\beta L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i L = i \pi \quad \Rightarrow \quad \beta_i = i \frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \Omega_i = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (i \geq 0)$$

et donc finalement :

$$u(x, t) = B \sin(\beta_i x) \cos(\Omega_i t) \quad \text{avec} \quad i \geq 0$$

À chaque position  $x$  le déplacement  $u$  oscille à la pulsation  $\Omega_i$  avec une amplitude  $B \sin(\beta_i x)$

# Barre encastrée-encastrée

## Déformées modales

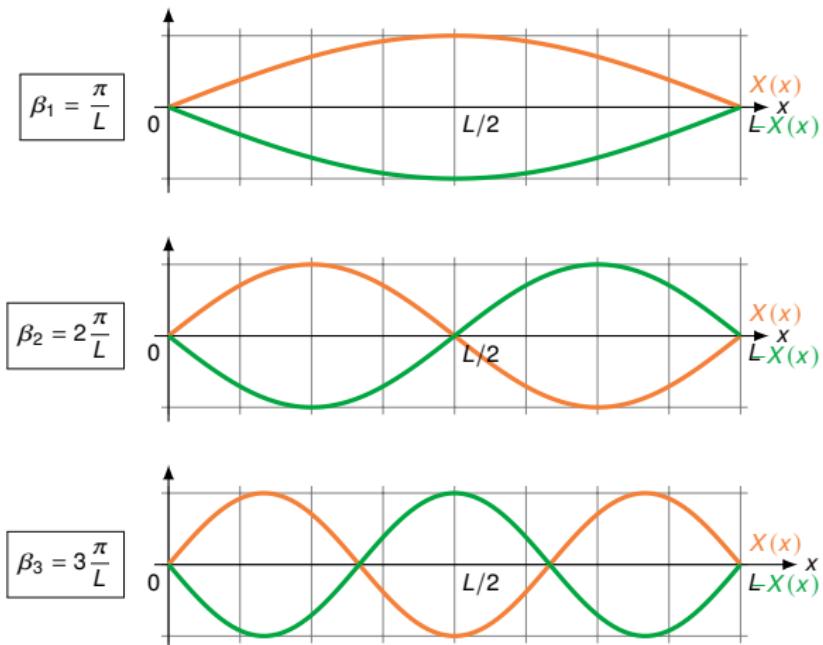


Figure 2.6- Évolution spatiale des déformées modales  $\{X_i\}_{i=1,2,3}$  pour une barre encastrée-encastrée.

# Modes de vibrations

## Définition

⇒ Les doublets  $\{(\Omega_i, X_i)\}_{i \geq 1}$  sont appelés **modes de vibrations**.

- Dans le cadre des vibrations longitudinales, on parlera de **modes de traction-compression**, **leur nature dépend du type de conditions aux limites envisagées**.
- Chaque mode  $i$  est caractérisé par une **pulsation propre**  $\Omega_i$  et une **forme propre**  $X_i = X_i(x)$ , fonction de la position sur l'axe de la barre.  
⇒ Les formes propres sont définies à une constante près.

## Remarque

La famille des vecteurs propres  $\{ \{X\}_i \}_{i=1, \dots, \infty}$  forme **une base de dimension  $\infty$**  permettant de représenter le comportement dynamique du système.

# Modes de vibrations

## Orthogonalité des modes de vibration

Deux modes donnés  $(\Omega_r, X_r)$  et  $(\Omega_s, X_s)$ , pour lesquels  $\Omega_r \neq \Omega_s$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^L X_r X_s \, dx = 0 \quad , \quad \int_0^L \frac{dX_r}{dx} \frac{dX_s}{dx} \, dx = 0 \quad \text{lorsque } r \neq s$$

## Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires**  $m_i$  et  $k_i$  définies par :

$$m_i = \rho S \int_0^L X_i^2 \, dx \quad , \quad k_i = E S \int_0^L \left( \frac{dX_i}{dx} \right)^2 \, dx \quad \forall i \geq 1$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$$

## Démonstration 2.3 – Orthogonalité des modes de vibration

L'équation des formes propres est écrite pour deux modes différents  $X_r$  et  $X_s$

$$\frac{d^2X_r}{dx^2} + \beta_r^2 X_r = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2X_s}{dx^2} + \beta_s^2 X_s = 0 \quad \text{avec } r \neq s \quad (2.2)$$

On effectue  $\int_0^L X_s (2.1) dx$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left( X_s \frac{d^2X_r}{dx^2} + \beta_r^2 X_s X_r \right) dx = 0 \\ & \underbrace{\left[ X_s \frac{dX_r}{dx} \right]_0^L}_{=0 \text{ (car C.I. homogènes)}} - \int_0^L \frac{dX_s}{dx} \frac{dX_r}{dx} dx + \int_0^L \beta_r^2 X_s X_r dx = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

puis  $\int_0^L X_r (2.2) dx$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left( X_r \frac{d^2X_s}{dx^2} + \beta_s^2 X_r X_s \right) dx = 0 \\ & \underbrace{\left[ X_r \frac{dX_s}{dx} \right]_0^L}_{=0 \text{ (car C.I. homogènes)}} - \int_0^L \frac{dX_r}{dx} \frac{dX_s}{dx} dx + \int_0^L \beta_s^2 X_r X_s dx = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

## Démonstration 2.3 – Orthogonalité des modes de vibration

En faisant (2.3)-(2.4), on obtient :

$$\left(\beta_r^2 - \beta_s^2\right) \int_0^L X_r X_s dx = 0$$

Donc comme  $r \neq s$  on a :

$$\int_0^L X_r X_s dx = 0 \tag{2.5}$$

En introduisant (2.5) dans (2.3) (ou (2.4)), on a également :

$$\int_0^L \frac{dX_r}{dx} \frac{dX_s}{dx} dx = 0$$

# Modes de vibrations

## Normalisation des modes de vibration

Les vecteurs propres  $X_i$  sont définis à une constante près, on peut donc les **normaliser par rapport aux masses modales** :

$$Y_i = \frac{X_i}{\sqrt{\rho S \int_0^L X_i^2 dx}} = \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} \quad \Rightarrow \quad m_i = 1$$

Quand on considère les modes  $\{(\Omega_i, Y_i)\}_{i=1, \dots, \infty}$  on a :  $m_i = 1$  et  $\Omega_i = \sqrt{k_i}$

## Remarque

Dans la suite on suppose que les modes sont **normalisés par rapport à la masse**

# Prise en compte de l'amortissement

## Deux types d'amortissement :

- Amortissement structural dû à la nature viscoélastique du matériau.

$$\Rightarrow \text{Viscoélasticité linéaire, modèle de Kelvin : } \sigma = E\epsilon + \mu\dot{\epsilon} = E \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

- Amortissement dû aux forces (linéaires) de frottement externes

$$\propto \frac{\partial u}{\partial t}$$

## Nouvelle écriture du PFD sur l'élément de barre

Le PFD sur l'élément de barre s'écrit maintenant :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = S \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( E \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)}_{\sigma} dx - \nu dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

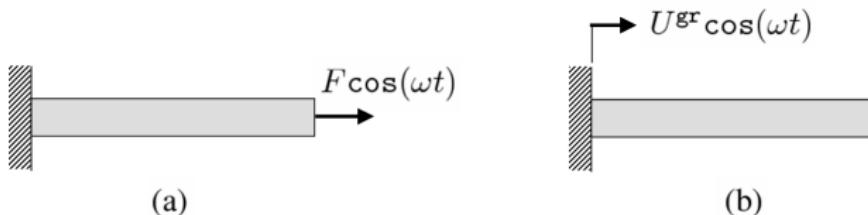
et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in ]0, L[$$

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

On considère le problème de vibrations d'une barre sollicitée ponctuellement, sur l'une de ses extrémités, par force ou déplacement imposés.

⇒ Les **excitations sont supposés harmoniques** de pulsation  $\omega$ , s'appliquant selon la direction longitudinale  $x$ .



**Figure 2.4-** Vibrations forcées harmoniques d'une barre (traction-compression) : (a) excitation par force imposée ; (b) excitation par déplacement imposé.

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

- La **réponse stationnaire** s'obtient par considération d'une solution particulière  $u(x, t) = U(x)e^{j\omega t}$  de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in ]0, L[$$

- On montre que l'amplitude complexe  $U$  est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \gamma^{*2} U = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \gamma^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E^*}}$$

Les phénomènes de dissipation étant pris en compte à partir d'un **mode de Young complexe**  $E^* = E(1 + j\eta)$  où  $\eta$  est appelé **facteur de perte**. Dans ce cas la contrainte  $\sigma$  est reliée à la déformation axiale  $\epsilon$  par  $\sigma = E(1 + j\eta) \epsilon$ .

- L'amplitude complexe  $U$  s'exprime alors par

$$U = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \gamma^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E^*}}$$

où  $\gamma^*$  est le **nombre d'onde complexe, défini par rapport à la pulsation d'excitation**.

## Démonstration 2.4

L'introduction de  $u(x, t) = U(x)e^{j\omega t}$  dans

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu}{E} \frac{\partial u^3}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\nu}{SE} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

conduit à

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dx^2} + j\omega \frac{\mu}{E} \frac{d^2 U}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho}{E} U - j\omega \frac{\nu}{SE} U &= 0 \\ \left(1 - j\omega \frac{\mu}{E}\right) \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\omega^2 \frac{\rho}{E} - j\omega \frac{\nu}{SE}\right) U &= 0 \\ \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2 \rho - j\omega \nu / S}{E + j\omega \mu}\right) U &= 0 \end{aligned}$$

Si on néglige l'amortissement dû aux forces de frottement externes (i.e.  $\nu = 0$ ) on obtient :

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \gamma^*{}^2 U = 0 \quad x \in ]0, L[$$

avec le nombre d'onde complexe

$$\gamma^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E + j\omega \mu}} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E(1 + j\eta)}} \quad \text{où} \quad \boxed{\eta = \frac{\omega \mu}{E}}$$

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

La solution stationnaire s'exprime à partir de 2 constantes  $A$  et  $B$ , obtenues par application des **conditions aux limites** qui contiennent le forçage :

### Barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$

Conditions aux limites :  $U|_{x=0} = 0$  et  $E^*S \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} = F$

L'amplitude complexe  $U$  s'écrit alors :

$$U = \frac{F}{j\gamma^* E^* S} \frac{-e^{-j\gamma^* x} + e^{j\gamma^* x}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \quad x \in [0, L]$$

### Barre excitée par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$

Conditions aux limites :  $U|_{x=0} = U^{\text{gr}}$  et  $S\sigma|_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} = 0$

L'amplitude complexe  $U$  s'écrit alors :

$$U = U^{\text{gr}} \frac{e^{-j\gamma^*(x-L)} + e^{j\gamma^*(x-L)}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \quad x \in [0, L]$$

## Démonstration 2.5 - Barre encastrée en $x = 0$ et excitée par force en $x = L$

Si la barre est **excité par une force harmonique**  $Fe^{j\omega t}$  en  $x = L$  on a alors :

$$Fe^{j\omega t} = S \sigma|_{x=L} = S(E\epsilon + \mu\dot{\epsilon})|_{x=L} = S(E\epsilon + j\omega\mu)\epsilon|_{x=L} = E^*S \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=L} = E^*S \frac{dU}{dx}\Big|_{x=L} e^{j\omega t}$$

Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$U|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad E^*S \frac{dU}{dx}\Big|_{x=L} = F$$

d'où, comme  $U(x) = Ae^{-j\gamma^*x} + Be^{j\gamma^*x}$ , on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^*e^{-j\gamma^*L} & j\gamma^*e^{j\gamma^*L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^*e^{-j\gamma^*L} & j\gamma^*e^{j\gamma^*L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = -A = \frac{F}{j\gamma^*E^*S} \frac{1}{e^{-j\gamma^*L} + j\gamma^*e^{j\gamma^*L}}$$

et donc finalement :

$$U = \frac{F}{j\gamma^*E^*S} \frac{-e^{-j\gamma^*x} + e^{j\gamma^*x}}{e^{-j\gamma^*L} + j\gamma^*e^{j\gamma^*L}} \quad x \in [0, L]$$

## Démonstration 2.5 - Barre excitée par déplacement imposé en $x = 0$ et libre en $x = L$

Si la barre est **excité par un déplacement harmonique  $U^{\text{gr}} e^{j\omega t}$**  en  $x = 0$  on a alors :

$$u|_{x=0} = U|_{x=0} e^{j\omega t} = U^{\text{gr}} e^{j\omega t}$$

Les conditions aux limites s'écrivent donc :

$$U|_{x=0} = U^{\text{gr}} \quad \text{et} \quad S\sigma|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dx} \Big|_{x=L} = 0$$

d'où, comme  $U(x) = Ae^{-j\gamma^* x} + Be^{j\gamma^* x}$ , on a :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U^{\text{gr}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j\gamma^* e^{-j\gamma^* L} & j\gamma^* e^{j\gamma^* L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} U^{\text{gr}} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{U^{\text{gr}} e^{j\gamma^* L}}{e^{-j\gamma^* L} + j\gamma^* B e^{j\gamma^* L}} \quad \text{et} \quad B = \frac{U^{\text{gr}} e^{-j\gamma^* L}}{e^{-j\gamma^* L} + j\gamma^* B e^{j\gamma^* L}}$$

et donc finalement :

$$U = U^{\text{gr}} \frac{e^{-j\gamma^* (x-L)} + e^{j\gamma^* (x-L)}}{e^{-j\gamma^* L} + e^{j\gamma^* L}} \quad x \in [0, L]$$

# Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

## Phénomène de résonance

S'il n'y a pas d'amortissement :

- **Barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force en  $x = L$ , on a en  $x = L$**

$$U(x = L) = \frac{F}{j\gamma ES} \frac{-e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}}{e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}} = \frac{F}{\gamma ES} \tan(\gamma L)$$

donc  $U(x = L) \rightarrow \infty$  (résonance) si  $\gamma = \frac{(2i - 1)\pi}{2L}$  et  $\omega = \frac{(2i - 1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  ( $i \geq 1$ )

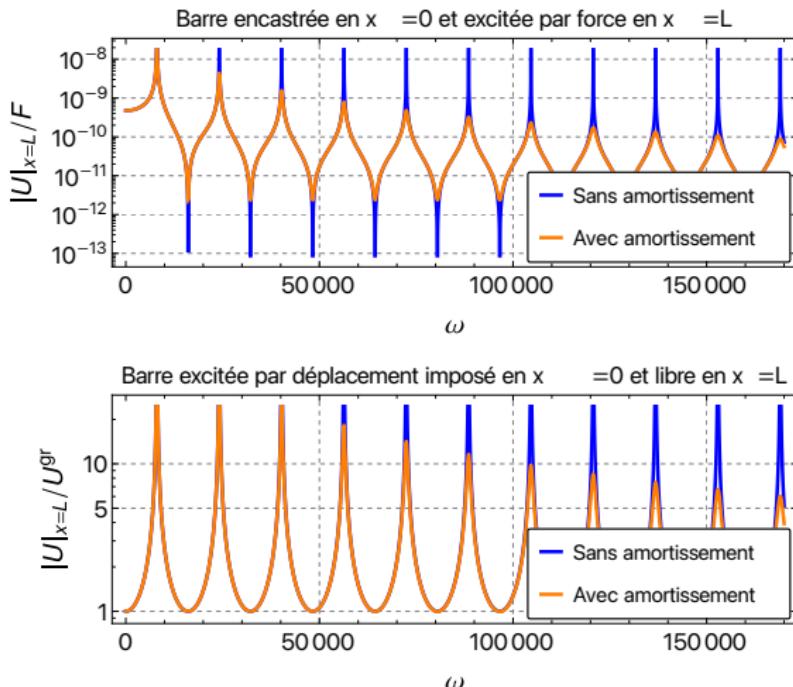
⇒ Résonance quand  $\omega = \Omega_i$  des modes de la barre encastré-libre

- **Barre excitée par déplacement imposé en  $x = 0$  et libre en  $x = L$ , on a en  $x = L$**

$$U(x = L) = U^{\text{gr}} \frac{2}{e^{-j\gamma L} + e^{j\gamma L}} = U^{\text{gr}} \frac{1}{\cos(\gamma L)}$$

⇒ Résonance quand  $\omega = \Omega_i$  des modes de la barre encastré-libre

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »



**Figure 2.5-** Évolution fréquentielle du déplacement longitudinal (amplitude) d'une barre encastrée en  $x = 0$  et excitée (en haut) par force harmonique en  $x = L$  et (en bas) par déplacement imposé en  $x = 0$  et libre en  $x = L$ .  
Réponse au point d'excitation.

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

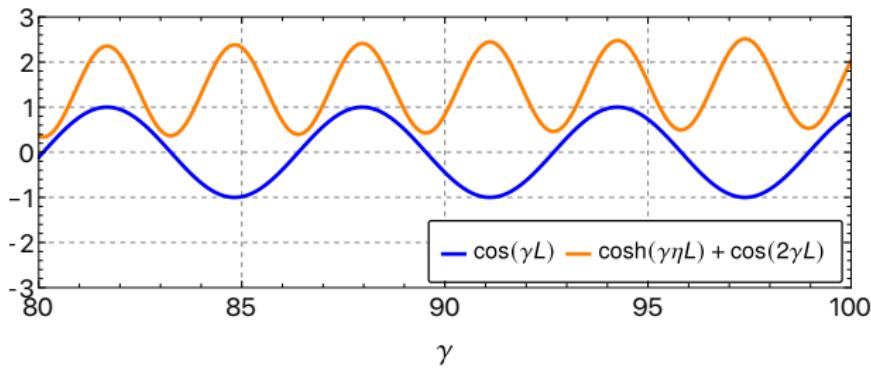
### Remarque sur le modèle d'amortissement

si  $0 < \eta \ll 1 \Rightarrow$

$$\gamma^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E(1+j\eta)}} \approx \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} - j \frac{1}{2} \eta \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \gamma - j \frac{1}{2} \eta \gamma$$

- Le bruit n'affecte que la partie réelle de nombre d'onde
- Le décalage des fréquences de résonance est très faible par rapport au cas conservatif

**Preuve graphique :**  $|\tan(\gamma^* L)| = \left| \tan \left( \left( \gamma - j \frac{1}{2} \eta \gamma \right) L \right) \right| = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2(\gamma \eta L) + \sin^2(2\gamma L)}}{\operatorname{ch}(\gamma \eta L) + \cos(2\gamma L)}$



# Principe de décomposition modale

## Proposition

Les formes propres  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  constituent une base de représentation pour décrire le comportement dynamique du système (possiblement forcé). La décomposition modale se traduit par

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x)$$

$\phi_i = \phi_i(t)$  : **amplitudes modales**.

## Principe de troncature modale

En pratique, seuls ***n modes***  $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$  sont retenus pour décrire la décomposition modale. C'est le **principe de troncature modale**. La décomposition s'écrit alors :

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) X_i(x)$$

# Principe de décomposition modale

## Cas des vibrations libres non amorties

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 & \forall i \geq 1 \\ \phi_i|_{t=0} = \phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i u_0 \, dx \quad , \quad \frac{d\phi}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{u}_0 \, dx \end{cases}$$

- La solution de chacune des équations précédentes est connue (cf. Chap. 1) :

$$\phi_i = \phi_{i0} \cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t)$$

## Démonstration 2.6

On suppose un décomposition modale de type  $u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x)$  qui est introduite dans l'équation du mouvement sans amortissement :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\int_0^L X_r \left( \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{d^2 X_i}{dx^2} - \frac{\rho}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\int_0^L X_r \left( \sum_{i=1}^{\infty} -\phi_i \beta_i^2 X_i - \frac{\rho}{E} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} -\phi_i \frac{\beta_i^2}{\rho S} \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx}_{\begin{array}{l} = 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i \end{array}} - \frac{1}{SE} \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\frac{d^2 \phi_i}{dt^2}}_{\begin{array}{l} = 0 \text{ si } r \neq i \\ = m_i \text{ si } r = i \end{array}} \rho S \int_0^L X_r X_i dx = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, les définition des masses et raideurs modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse ( $m_i = 1$ ), on obtient :

$$-\frac{\beta_i^2}{\rho S} \phi_i - \frac{1}{SE} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} = 0$$

## Démonstration 2.6

Comme  $\beta_i^2 = \frac{\Omega_i^2 \rho}{E}$ , on obtient finalement :

$$\frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \quad \forall i \geq 1$$

Il faut aussi projeter les conditions initiales  $u(x, 0) = u_0$  dans la base des modes propres :

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i$$

$$\rho S \int_0^L X_r u_0 dx = \rho S \int_0^L X_r \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i dx$$

$$\rho S \int_0^L X_r u_0 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} \rho S \int_0^L X_r X_i dx$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i u_0 dx$$

$$\dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{u}_0 dx$$

# Principe de décomposition modale

Prise en compte d'une excitation aux extrémités de la barre

## Objectif

Approximer les résultats obtenus précédemment à l'aide d'une décomposition modale tronquée

En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que :

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E} \Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = f_0 X_i(0) + f_L X_i(L) \quad \forall i \geq 1$$

$f_0$  et  $f_L$  : forces appliquées au système en  $x = 0$  et  $x = L$

## Remarque

Les modes utilisées sont choisis pour être « **compatibles avec le forçage considéré** »

## Démonstration 2.7

**Formulation faible** du problème (cf. *cours d'éléments finis*, J.-M. Mencik) :

$$\int_0^L h(x) \left( \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

avec  $h(x)$  une fonction définie sur  $[0, L]$ . Une intégration par partie des deux derniers termes donne :

$$\begin{aligned} \rho S \int_0^L h(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx - \mu S \left[ h(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_0^L + \mu S \int_0^L \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx \\ - ES \left[ h(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L + ES \int_0^L \frac{dh(x)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \end{aligned}$$

On pose  $u(x, t) = \sum_r \phi_r(t) X_r(x)$  et  $h(x) = X_i(x)$  ce qui donne :

$$\begin{aligned} \rho S \int_0^L X_i(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_r \phi_r X_r \right) dx - \mu S \left[ X_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_0^L + \mu S \int_0^L \frac{dX_i(x)}{dx} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left( \sum_r \phi_r X_r \right) dx \\ - ES \left[ X_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L + ES \int_0^L \frac{dX_i(x)}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_r \phi_r X_r \right) dx = 0 \end{aligned}$$

## Démonstration 2.7

Donc, en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes (cf. diapositive 24), on obtient

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E} \Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = \mu S \left[ X_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_0^L + E S \left[ X_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L =$$

$$X_i(L) S \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=L} \right) - X_i(0) S \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} \right)$$

Selon le **modèle de Kelvin** on a également (cf. diapositive 28)

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

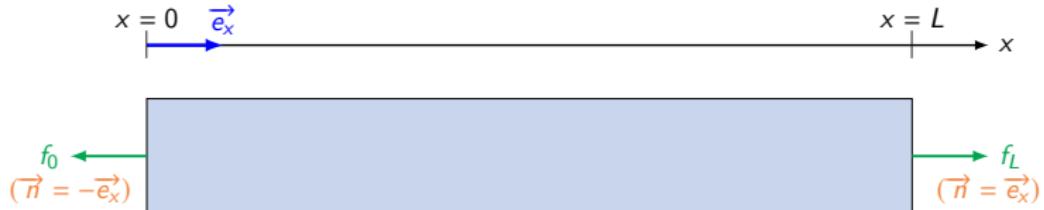
$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E} \Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = \mu S \left[ X_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_0^L + E S \left[ X_i(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L =$$

$$\underbrace{X_i(L) S \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=L} \right)}_{\sigma S = f_L} - \underbrace{X_i(0) S \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \Big|_{x=0} \right)}_{\sigma S = -f_0 \text{ (convention)}}$$

Et donc finalement

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E} \Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = f_0 X_i(0) + f_L X_i(L) \quad \forall i \geq 1$$

## Démonstration 2.7



Le **tenseur des contraintes** et le **vecteurs contrainte** s'écrivent respectivement :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \vec{T} = [\sigma] \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  un vecteur élémentaire normal à la surface et orienté vers l'extérieur de la surface (cf. figure).

On peut donc écrire que :

$$\vec{f}_L = f_L \vec{e}_x = \int_S \vec{T} dS = \int_S [\sigma] \vec{n} dS = \sigma \vec{e}_x \int_S dS = \sigma S \vec{e}_x$$

$$\vec{f}_0 = f_0 \vec{e}_x = \int_S \vec{T} dS = \int_S [\sigma] \vec{n} dS = -\sigma \vec{e}_x \int_S dS = -\sigma S \vec{e}_x$$

# Principe de décomposition modale

## Cas d'une excitation par force imposée

**Système :** barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force  $F \cos(\omega t)$  en  $x = L$

- L'équation précédente s'écrit : 
$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = F \cos(\omega t)X_i(L) \quad \forall i \geq 1$$
- On suppose une réponse oscillant à la pulsation de forçage  $u(x, t) = U(x)e^{j\omega t}$ . Dans ce cas en posant  $\phi_i = \Phi_i e^{j\omega t}$  la décomposition modale s'écrit :

$$U(x, \omega) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\omega)X_i(x).$$

- Comme précédemment, les phénomènes de dissipation sont pris en compte à partir d'un facteur de perte  $\eta$ . L'équation précédente s'écrit :

$$-\omega^2\Phi_i + \Omega_i^2(1 + j\eta)\Phi_i = F X_i(L) \quad \forall i \geq 1.$$

- Les modes de barre encastrée-libre sont utilisée, on obtient donc :

$$\Phi_i = \frac{(F/\Omega_i^2)X_i(L)}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2} = \frac{(F/\Omega_i^2)\sin[(2i-1)\pi/2]}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2} \quad \forall i \geq 1$$

## Démonstration 2.8

Passage en complexe (on étudie  $\hat{\phi}_i$  avec  $\phi_i = \operatorname{Re}[\hat{\phi}_i]$  et on omet les  $\hat{\cdot}$ ) :

$$\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = F \cos(\omega t) X_i(L) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2\phi_i}{dt^2} + \frac{\mu}{E}\Omega_i^2 \frac{d\phi_i}{dt} + \Omega_i^2 \phi_i = F e^{j\omega t} X_i(L)}$$

On suppose  $\phi_i = \Phi_i e^{j\omega t}$  et donc :

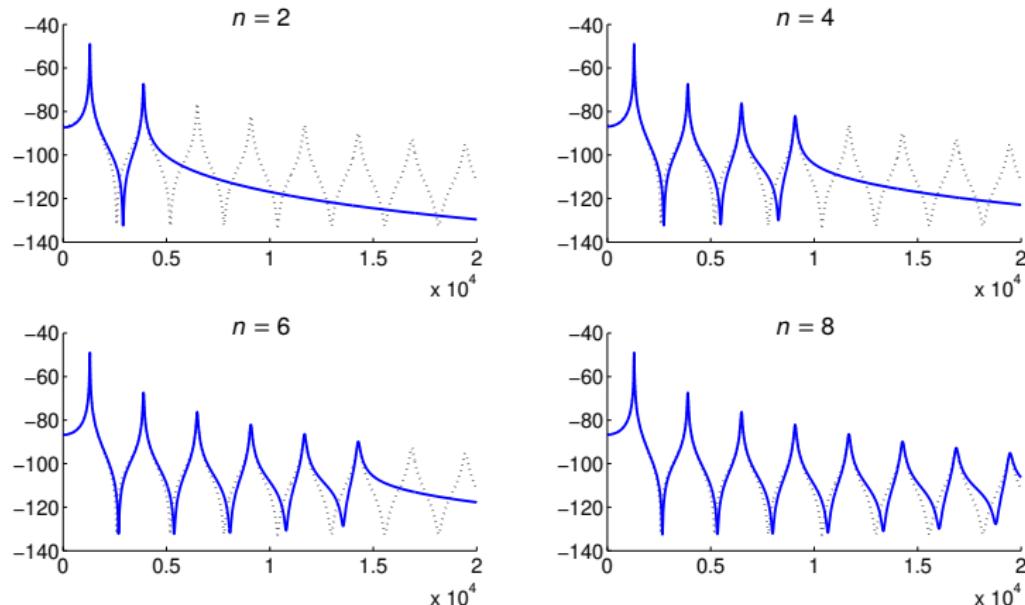
$$\boxed{-\omega^2 \Phi_i + j\omega \frac{\mu}{E} \Omega_i \Phi_i + \Omega_i^2 \Phi_i = F X_i(L)}$$

Comme  $\eta = \frac{\omega\mu}{E}$ , on a bien :

$$\boxed{-\omega^2 \Phi_i + \Omega_i^2 (1 + j\eta) \Phi_i = F X_i(L) \quad \forall i \geq 1.}$$

# Principe de décomposition modale

Cas d'une excitation par force imposée



**Figure 2.6-** Évolution fréquentielle du déplacement d'une barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force harmonique en  $x = L$  : réponse au point d'excitation obtenue par approche modale.

# Principe de décomposition modale

## Cas d'une excitation par mouvement d'un support

**Système** : barre soumise en  $x = 0$  à un déplacement imposé  $u^{\text{gr}}$

- **Dans le référentiel du support en mouvement**, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho S \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = -\rho S \frac{d^2 u^{\text{gr}}}{dt^2} \quad \text{avec} \quad u^* = u - u^{\text{gr}}$$

- En supposant un mouvement oscillant à la pulsation de forçage  $u^*(x, t) = U^*(x)e^{j\omega t}$  et en s'appuyant sur une décomposition modal  $U^* = \sum_k \Phi_k X_k$ , puis en observant encore les propriétés d'orthogonalité, l'équation précédente devient :

$$-\omega^2 \Phi_i + \Omega_i^2 (1 + j\eta) \Phi_i = \omega^2 \rho S U^{\text{gr}} \int_0^L X_i \, dx \quad \forall i \geq 1.$$

où on a pris en compte les phénomènes de dissipation à l'aide du facteur de perte  $\eta$ .

- Les  $\Phi_i$  sont alors données par

$$\Phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \rho S U^{\text{gr}} \int_0^L \sin(\beta_i x) \, dx}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2} \quad \forall i \geq 1,$$

où les modes de barre encastrée-libre sont encore utilisés.

## Démonstration 2.9

Si  $u^* = u - u^{\text{gr}}$ , alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho S \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2} - \mu S \frac{\partial^3 u^*}{\partial x^2 \partial t} - ES \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} = -\rho S \frac{d^2 u^{\text{gr}}}{dt^2}}$$

On suppose  $u^*(x, t) = U^*(x) e^{j\omega t}$  et donc :

$$-\omega^2 \rho S U^* - E(1 + j\omega \frac{\mu}{E}) S \frac{d^2 U^*}{dx^2} = \omega^2 \rho S U^{\text{gr}}$$

$$\rho S U^* + \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) S \frac{d^2 U^*}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}}$$

On pose ensuite  $U^* = \sum_k \Phi_k X_k$  et donc :

$$\rho S \sum_k \Phi_k X_k + \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}}$$

$$\int_0^L \cancel{X_r} \left( \rho S \sum_k \Phi_k X_k + \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \frac{d^2 X_k}{dx^2} = -\rho S U^{\text{gr}} \right) \cancel{dx}$$

$$\int_0^L \cancel{X_r} \left( \rho S \sum_k \Phi_k X_k - \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) S \sum_k \Phi_k \beta_k^2 X_k = -\rho S U^{\text{gr}} \right) \cancel{dx}$$

## Démonstration 2.9

Du fait de l'orthogonalité des modes on obtient :

$$\Phi_i - \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) \Phi_i \frac{\beta_i^2}{\rho} = - \int_0^L X_i \rho S U^{\text{gr}} dx$$

$$\Phi_i - \frac{E}{\omega^2} (1 + j\eta) \Phi_i \frac{\Omega_i^2}{E} = -\rho S U^{\text{gr}} \int_0^L X_i dx$$

$$-\omega^2 \Phi_i + \Omega_i^2 (1 + j\eta) \Phi_i = \omega^2 \rho S U^{\text{gr}} \int_0^L X_i dx$$

Finalement on a bien :

$$\boxed{\Phi_i = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \rho S U^{\text{gr}} \int_0^L X_i dx}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2} = \frac{(\omega/\Omega_i)^2 \rho S U^{\text{gr}} \int_0^L \sin(\beta_i x) dx}{(1 + j\eta) - (\omega/\Omega_i)^2}}$$

## Digression sur d'autres problèmes de vibrations

- **Arbre cylindrique** (cf. Fig. 3.7(a)) : 
$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[, \text{ où } \alpha = \alpha(t, x) \text{ représente la}$$

rotation d'une section de l'arbre positionnée à l'abscisse  $x$ ,  $G$  représente le module de cisaillement [Pa], et où l'on a pris en compte que le couple de torsion s'exprime  $GJ\alpha'$  ( $J$  représente le moment d'inertie polaire [ $m^4$ ]).

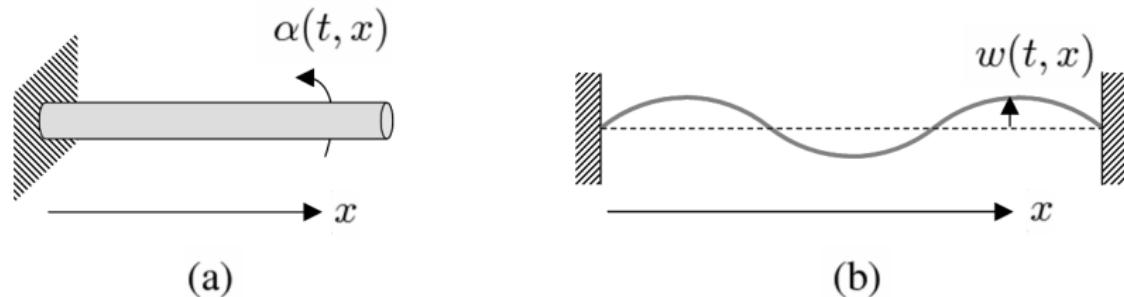
- **Corde tendue** (cf. Fig. 3.7(b)) : 
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{m}{T} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[, \text{ où } w = w(t, x) \text{ représente le}$$

déplacement transversal d'un point de la corde positionné à l'abscisse  $x$ ;  $m$  et  $T$  représentent respectivement la masse par unité de longueur [ $kg \cdot m^{-1}$ ] et la tension de la corde [N].

- **Onde acoustique (plane)** : 
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[, \text{ où } p = p(t, x) \text{ représente la pression}$$

acoustique en un point du tube d'abscisse  $x$ ;  $c = \sqrt{\gamma P_{atm}/\rho_0}$  est la vitesse du son dans le milieu considéré. Avec dans l'air  $\gamma = 1,4$  (rapport des chaleurs spécifiques),  $P_{atm} \approx 1$  bar (pression atmosphérique) et  $\rho_0 = 1,2$  g/cm<sup>3</sup> (masse volumique de l'air).

## Principe de décomposition modale



**Figure 2.7-** Problèmes de vibrations analogues à celui d'une barre : (a) torsion d'un arbre cylindrique ; (b) corde tendue.

# Plan du cours

Chapitre 1 – Introduction

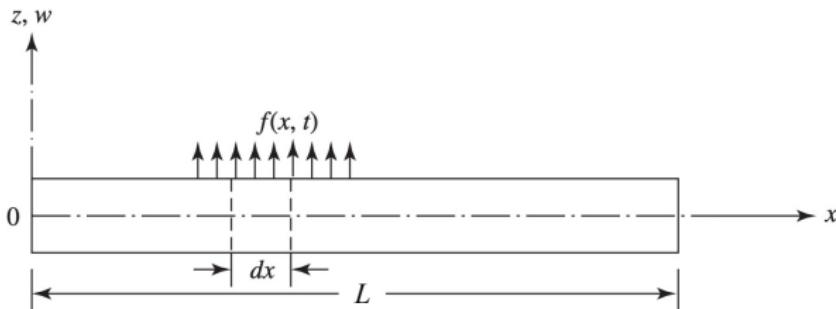
Chapitre 2 – Vibrations longitudinales des barres

**Chapitre 3 – Vibrations transversales des poutres**

Bibliographie

# Vibrations libres et modes de vibrations

⇒ **Problème étudié : vibrations libres d'une poutre en flexion droite, homogène et non amortie.**



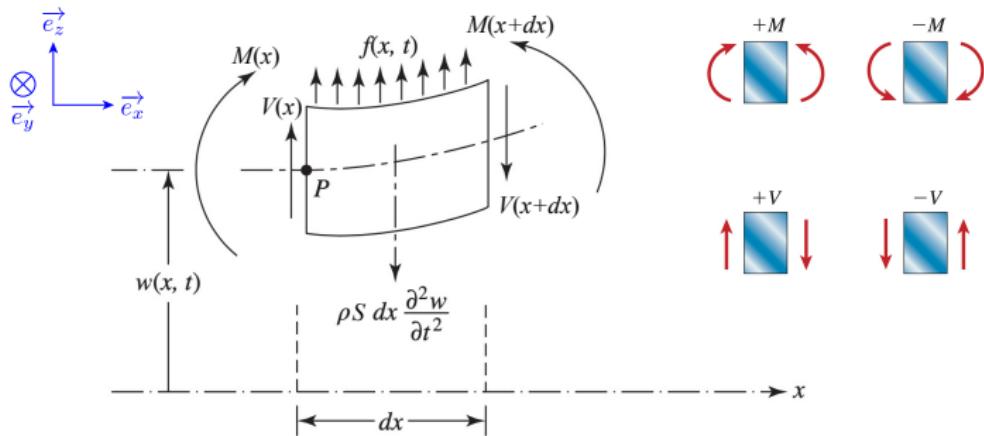
- **Caractéristiques matérielles et géométriques :**  
densité  $\rho$  [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ], module d'Young  $E$  [ $\text{Pa}$ ], section  $S$  [ $\text{m}^2$ ],  
moment quadratique de section  $I$  [ $\text{m}^4$ ], longueur  $L$  [ $\text{m}$ ].
- $w = w(t, x)$  : **déplacement transversal de la fibre neutre.**

## Équations du mouvement

À la position  $x$ , l'équation du mouvement du système s'exprime alors par :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad x \in ]0, L[$$

## Démonstration 3.10



- **Moment fléchissant  $M$**  : moment dont le vecteur est perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant de la flexion.
- **Effort tranchant  $V$**  : force perpendiculaire à la courbe moyenne et provoquant un cisaillement

En négligeant les effets inertIELS de rotation les équations de la dynamique s'écrivent :

**PFD (suivant  $\mathbf{e}_z$ ) :**  $-V(x + dx) + f(x, t)dx + V(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$

**TMC en  $P$  (suivant  $\mathbf{e}_y$ ) :**  $-M(x + dx) + V(x + dx)dx - f(x, t)dx \frac{dx}{2} + M(x) = 0$

## Démonstration 3.9

En notant  $V(x + dx) = V(x) + \frac{\partial V}{\partial x} dx$  et  $M(x + dx) = M(x) + \frac{\partial M}{\partial x} dx$ , les équations précédentes deviennent :

**PFD (suivant  $\mathbf{e}_z$ ) :**  $-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$

**TMC en  $P$  (suivant  $\mathbf{e}_y$ ) :**  $\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0$

La 2e équation permet d'écrire  $V = \frac{\partial M}{\partial x}$  (voir chap. 8 de [Gere et Goodno(2012)]) et la 1ère devient :

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

La théorie élémentaire de la flexion des poutres (cf. cours R. Serra et [Gere et Goodno(2012)], chap. 8, éq. (8-7))

nous dit que  $M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  (et donc  $V = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ ) L'équation précédente devient donc :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t) \quad x \in ]0, L[$$

# Vibrations libres et modes de vibrations

## Solutions stationnaires harmoniques de l'équation homogène

- On considère les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation  $\Omega$ ) du problème en posant

$$w(x, t) = X(x) \cos(\Omega t)$$

- Avec  $f(x, t) = 0$ , l'équation à résoudre devient :

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta = \left( \frac{\Omega^2 \rho S}{EI} \right)^{1/4}$$

$\beta$  : **nombre d'onde de flexion** et  $\lambda$  : **longueur d'onde**

- Solution :  $X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \text{ch}(\beta x) + D \text{sh}(\beta x) \quad x \in [0, L]$

$A, B, C$  et  $D$  : constantes déterminées à partir des **conditions aux limites**.

## Démonstration 3.10

On cherche les solutions **particulières stationnaires harmoniques** (de pulsation  $\Omega$ ) du problème en posant

$w(x, t) = X(x) \cos(\Omega t)$  qui est introduit dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d^4 X}{dx^4} \cos(\Omega t) - \frac{\rho S}{EI} \Omega^2 X \cos(\Omega t) = 0$$

L'équation à résoudre est donc bien :

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta = \left( \frac{\Omega^2 \rho S}{EI} \right)^{1/4}$$

Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^4 - \beta^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm\beta, \pm j\beta$$

et donc :

$$X = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x) \quad x \in [0, L]$$

# Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont définies en considérant les 4 grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion (voir [Gere et Goodno(2012)], Chap. 8) :

- le déplacement dû à la flexion :  $w(x, t)$
- le déplacement angulaire (rotation) dû à la flexion :  $\theta(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$
- le moment de flexion :  $M(x, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$
- l'effort tranchant :  $V(x, t) = EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3}$

## Définition

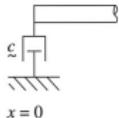
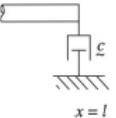
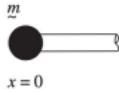
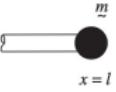
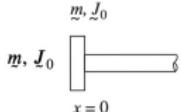
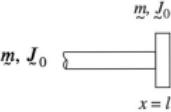
Une **condition aux limites homogène** consiste à annuler l'une de ses grandeurs

# Conditions aux limites

Boundary condition	At left end ( $x = 0$ )	At right end ( $x = l$ )
1. Free end (bending moment = 0, shear force = 0)	 $x = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	 $x = l$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
2. Fixed end (deflection = 0, slope = 0)	 $x = 0$ $w(0, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$	 $x = l$ $w(l, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$
3. Simply supported end (deflection = 0, bending moment = 0)	 $x = 0$ $w(0, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	 $x = l$ $w(l, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
4. Sliding end (slope = 0, shear force = 0)	 $x = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	 $x = l$ $\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
5. End spring (spring constant = $k$ )	 $x = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -kw(0, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	 $x = l$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = kw(l, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$

Tiré de [Rao(2019)]

# Conditions aux limites

Boundary condition	At left end ( $x = 0$ )	At right end ( $x = l$ )
6. End damper (damping constant = $\xi$ )	 $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -\xi \frac{\partial w}{\partial t}(0,t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$	 $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = \xi \frac{\partial w}{\partial t}(l,t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$
7. End mass (mass = $m$ with negligible moment of inertia)	 $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = 0$	 $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = 0$
8. End mass with moment of inertia (mass = $m$ , moment of inertia = $J_0$ )	 $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = -J_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(0,t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)$	 $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l,t) = J_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(l,t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)$

Tiré de [Rao(2019)]

# Poutre en appuis simples

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad , \quad X|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^2X}{dx^2} \right|_{x=L} = 0$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

$$X_i(x) = B \sin(\beta_i x) \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad i \geq 1$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\Omega_i = \left( \frac{i\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad i \geq 0$$

### Remarque

**Poutre en appuis simples** : seul cas où il y a une solution analytique

## Démonstration 3.11

Les dérivées successives de  $X(x)$  sont :

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x)$$

$$\frac{dX}{dx} = -\beta A\sin(\beta x) + \beta B\cos(\beta x) + \beta C\sinh(\beta x) + \beta D\cosh(\beta x)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\beta^2 A\cos(\beta x) - \beta^2 B\sin(\beta x) + \beta^2 C\cosh(\beta x) + \beta^2 D\sinh(\beta x)$$

Les conditions aux limites d'une poutre en appui simple s'écrivent donc :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A + C = 0 \quad (3.6)$$

$$X|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad A\cos(\beta L) + B\sin(\beta L) + C\cosh(\beta L) + D\sinh(\beta L) = 0 \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{d^2X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\beta^2 A + \beta^2 C = 0 \quad (3.8)$$

$$\left. \frac{d^2X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\beta^2 A\cos(\beta L) - \beta^2 B\sin(\beta L) + \beta^2 C\cosh(\beta L) + \beta^2 D\sinh(\beta L) \quad (3.9)$$

## Démonstration 3.11

$$(3.6) + (3.8) \Rightarrow A = C = 0$$

Les équations (3.7) et (3.9) deviennent donc :

$$B\sin(\beta L) + D\text{sh}(\beta L) = 0 \quad (3.10)$$

$$-B\sin(\beta L) + D\text{sh}(\beta L) = 0 \quad (3.11)$$

En effectuant les opérations suivantes on obtient :

$$(3.10) + (3.11) \Rightarrow 2D\text{sh}(\beta L) \Rightarrow D = 0$$

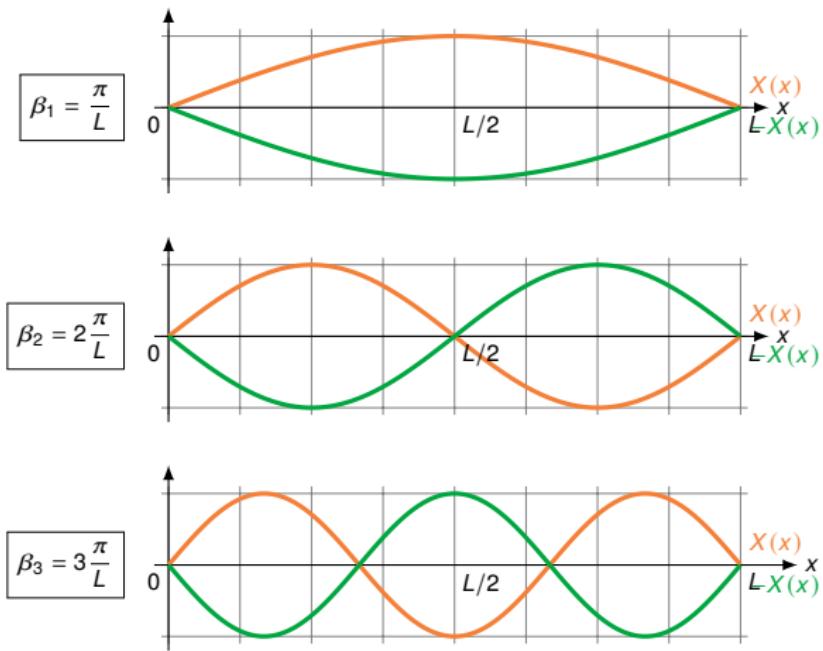
$$(3.10) - (3.11) \Rightarrow 2B\sin(\beta L) \quad \text{équation caractéristique} \Rightarrow \beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad (i \geq 1)$$

Finalement la déformée modale s'écrit :

$$X_i = B\sin(\beta_i x) \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \beta_i = \frac{i\pi}{L} \quad i \geq 1$$

# Poutre en appuis simples

## Déformées modales



**Figure 3.8-** Évolution spatiale des formes propres  $\{X_i\}_{i=1,2,3}$  pour une poutre en appuis simples.

# Poutre encastrée-libre

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dX}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad , \quad \frac{d^2X}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^3X}{dx^3} \Big|_{x=L} = 0$$

Les solutions de l'équation (il y en a plusieurs !) s'écrivent :

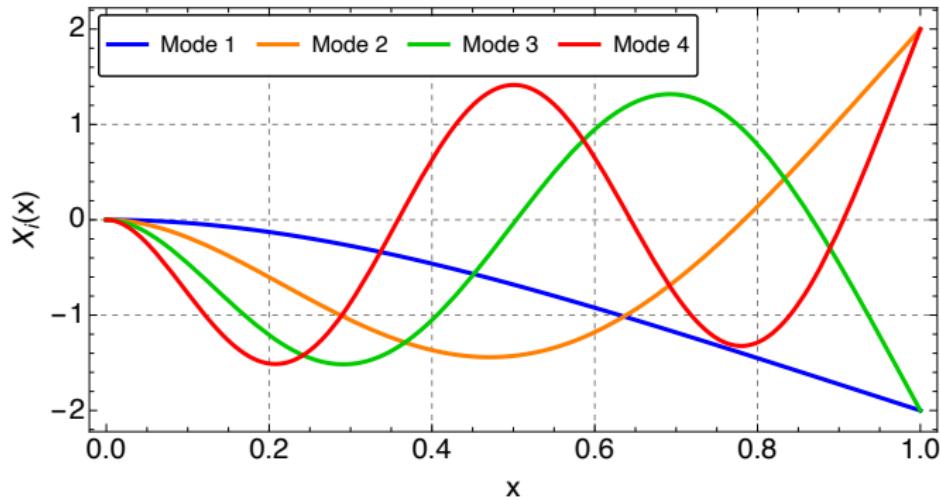
$$X_i(x) = A \left[ \cos(x\beta_i) - \operatorname{ch}(x\beta_i) + \frac{(\cos(L\beta_i) + \operatorname{ch}(L\beta_i))}{\sin(L\beta_i) + \operatorname{sh}(L\beta_i)} (\operatorname{sh}(x\beta_i - \sin(x\beta_i))) \right] \quad x \in [0, L] \quad (3.12)$$

Avec

$$\beta_1 L = 1.8751, \quad \beta_2 L = 4.69409, \quad \beta_3 L = 7.85476, \quad \beta_i L \approx (2i - 1) \frac{\pi}{2} \text{ pour } i > 3$$

# Poutre encastrée-libre

## Déformées modales



**Figure 3.9-** Évolution spatiale des formes propres  $\{X_i\}_{i=1,2,3,4}$  pour une poutre encastrée-libre.

## Démonstration 3.12

Les dérivées successives de  $X(x)$  sont :

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\cosh(\beta x) + D\sinh(\beta x)$$

$$\frac{dX}{dx} = -\beta A\sin(\beta x) + \beta B\cos(\beta x) + \beta C\sinh(\beta x) + \beta D\cosh(\beta x)$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\beta^2 A\cos(\beta x) - \beta^2 B\sin(\beta x) + \beta^2 C\cosh(\beta x) + \beta^2 D\sinh(\beta x)$$

$$\frac{d^3X}{dx^3} = A\beta^3 \sin(\beta x) - B\beta^3 \cos(\beta x) + C\beta^3 \sinh(\beta x) + D\beta^3 \cosh(\beta x)$$

Les conditions aux limites en  $x = 0$  donnent :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(x)|_{x=0} = \boxed{A + C = 0} \\ \frac{dX(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \boxed{\beta B + \beta D = 0} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = -C \\ B = -D \end{array} \right.$$

donc

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} = -\beta^2 A (\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) - \beta^2 B (\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) = 0$$

ce qui donne

$$\boxed{B = -\frac{\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)}{\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)} A} \Rightarrow \text{On retrouve bien (3.12)}$$

## Démonstration 3.12

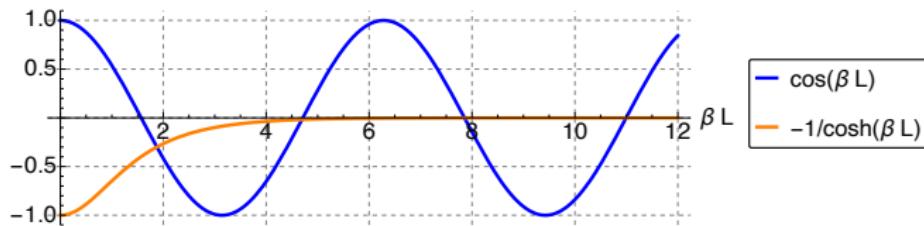
La 2ème C.L. en  $x = L$  s'écrit

$$\frac{d^3X(x)}{dx^3} \Big|_{x=L} = \beta^3 A(\sin(\beta L) - \text{sh}(\beta L)) - \beta^3 B(\cos(\beta L) + \text{ch}(\beta L)) = 0$$

d'où finalement

$$\frac{2A\beta^3 [\cos(\beta L)\text{ch}(\beta L) + 1]}{\sin(\beta L) + \text{sh}(\beta L)} = 0$$

L'équation caractéristique s'écrit :  $\cos(\beta L)\text{ch}(\beta L) + 1 = 0$  ou  $\cos(\beta L) = -1/\text{ch}(\beta L)$



Graphiquement (numériquement) on a donc bien :

$$\beta_1 L = 1.8751, \quad \beta_2 L = 4.69409, \quad \beta_3 L = 7.85476$$

De plus  $\lim_{\beta L \rightarrow \infty} (1/\text{ch}(\beta L)) = 0$  d'où

$$\lim_{\beta L \rightarrow \infty} \cos(\beta L) = 0 \quad \text{donc} \quad \beta_i L \approx (2i - 1) \frac{\pi}{2}$$

# Modes de vibrations

## Orthogonalité des modes de vibration

Deux modes donnés  $(\Omega_r, X_r)$  et  $(\Omega_s, X_s)$ , pour lesquels  $\Omega_r \neq \Omega_s$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^L X_r X_s \, dx = 0 \quad , \quad \int_0^L \frac{d^2 X_r}{dx^2} \frac{d^2 X_s}{dx^2} \, dx = 0 \quad \text{lorsque } r \neq s$$

## Définition

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les **quantités scalaires**  $m_i$  et  $k_i$  définies par :

$$m_i = \rho S \int_0^L X_i^2 \, dx \quad , \quad k_i = EI \int_0^L \left( \frac{d^2 X_i}{dx^2} \right)^2 \, dx \quad \forall i \geq 1$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par  $\Omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m_i}}$

## Démonstration 3.13 – Orthogonalité des modes de vibration

L'équation des formes propres est écrite pour deux modes différents  $X_r$  et  $X_s$

$$\frac{d^4 X_r}{dx^4} - \beta_r^4 X_r = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{d^4 X_s}{dx^4} - \beta_s^4 X_s = 0 \quad \text{avec} \quad r \neq s \quad (3.14)$$

On effectue  $\int_0^L X_s (3.13) dx$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left( X_s \frac{d^4 X_r}{dx^4} + \beta_r^4 X_s X_r \right) dx = 0 \\ & \left[ X_s \frac{d^3 X_r}{dx^3} \right]_0^L - \int_0^L \frac{dX_s}{dx} \frac{d^3 X_r}{dx^3} dx - \int_0^L \beta_r^4 X_s X_r dx = 0 \\ & \underbrace{\left[ X_s \frac{d^3 X_r}{dx^3} \right]_0^L - \left[ \frac{dX_s}{dx} \frac{d^2 X_r}{dx^2} \right]_0^L}_{=0 \text{ (C.I. homogènes)}} + \int_0^L \frac{d^2 X_s}{dx^2} \frac{d^2 X_r}{dx^2} dx - \int_0^L \beta_r^4 X_s X_r dx = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

puis  $\int_0^L X_r (3.14) dx$  :

$$\begin{aligned} & \left[ X_r \frac{d^3 X_s}{dx^3} \right]_0^L - \left[ \frac{dX_r}{dx} \frac{d^2 X_s}{dx^2} \right]_0^L + \int_0^L \frac{d^2 X_s}{dx^2} \frac{d^2 X_r}{dx^2} dx - \int_0^L \beta_s^4 X_s X_r dx = 0 \\ & =0 \text{ (C.I. homogènes)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

## Démonstration 3.13 – Orthogonalité des modes de vibration

En faisant (3.15)-(3.16), on obtient :

$$\left(\beta_s^4 - \beta_r^4\right) \int_0^L X_r X_s dx = 0$$

Par conséquent comme  $r \neq s$  alors :

$$\int_0^L X_r X_s dx = 0 \tag{3.17}$$

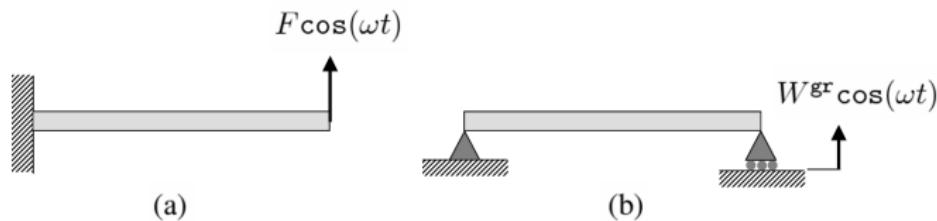
En introduisant (3.17) dans (3.15) (ou (3.16)), on a également :

$$\int_0^L \frac{d^2 X_r}{dx^2} \frac{d X_s^2}{dx^2} dx = 0$$

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

On considère le problème de réponse forcée **harmonique** d'une poutre amortie, les phénomènes d'amortissement étant pris en compte à partir d'un **facteur de perte  $\gamma$**  (ce type d'amortissement a été précédemment évoqué pour le cas de la barre en traction-compression).

Les excitations envisagées peuvent être de natures assez diverses : **forces transversales, moments, déplacements transversaux ou rotations**.



**Figure 3.10-** Vibrations forcée harmonique d'une poutre excitée à l'une de ses extrémités : (a) force imposée ; (b) déplacement imposé.

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

- La **réponse stationnaire** s'obtient par considération d'une solution particulière  $w(x, t) = W(x)e^{j\omega t}$  de

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad x \in ]0, L[$$

- L'amplitude complexe  $W$  est donc décrite par l'équation suivante :

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \gamma^{*4} W = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \gamma^{*} = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{E^* I} \right)^{1/4}$$

- L'amplitude complexe  $W$  s'exprime alors par

$$W = A e^{-j\gamma^{*}x} + B e^{j\gamma^{*}x} + C e^{-\gamma^{*}x} + D e^{\gamma^{*}x} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \gamma^{*} = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{E^* I} \right)^{1/4}$$

où  $\gamma^{*}$  est le **nombre d'onde de flexion complexe**.

## Démonstration 3.14

La forme de solution recherchée  $w(x, t) = W(x)e^{j\omega t}$  est introduite dans l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 W}{dx^4} e^{j\omega t} - \omega^2 \frac{\rho S}{EI} W e^{j\omega t} = 0$$

On a donc bien :

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - \gamma^4 W = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \gamma = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{EI} \right)^{1/4}$$

Si on souhaite prendre en compte de la dissipation on introduit encore

$$E^* = E(1 + j\eta) \quad \Rightarrow \quad \gamma^* = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{E^* I} \right)^{1/4}$$

Le polynôme caractéristique de l'équation précédente est :

$$r^4 - \gamma^{*4} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm \gamma^*, \pm i\gamma^*$$

et donc

$$W = A e^{-j\gamma^* x} + B e^{j\gamma^* x} + C e^{-\gamma^* x} + D e^{\gamma^* x} \quad x \in [0, L] \quad \text{où} \quad \gamma^* = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{E^* I} \right)^{1/4}$$

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

La solution stationnaire s'exprime à partir de **4 constantes**  $A, B, C$  et  $D$ , obtenues par application des **conditions aux limites** qui contiennent le forçage :

- **Poutre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force transversale en  $x = L$  :**

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$W|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dW}{dx}\Big|_{x=0} = 0, \quad E^* I \frac{d^2W}{dx^2}\Big|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad E^* I \frac{d^3W}{dx^3}\Big|_{x=L} = F$$

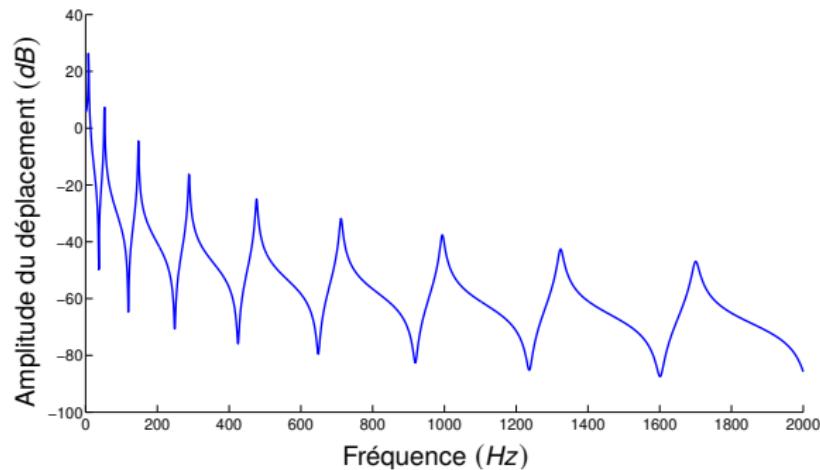
On a donc

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -j\gamma^* & j\gamma^* & -\gamma^* & \gamma^* \\ -\gamma^{*2}e^{-j\gamma^*L} & -\gamma^{*2}e^{j\gamma^*L} & \gamma^{*2}e^{-\gamma^*L} & \gamma^{*2}e^{\gamma^*L} \\ j\gamma^{*3}e^{-j\gamma^*L} & -j\gamma^{*3}e^{j\gamma^*L} & -\gamma^{*3}e^{-\gamma^*L} & \gamma^{*3}e^{\gamma^*L} \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F/(E^* I) \end{Bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

Les constantes  $A, B, C$  et  $D$  s'obtiennent alors par inversion numérique de la matrice  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}$$

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »

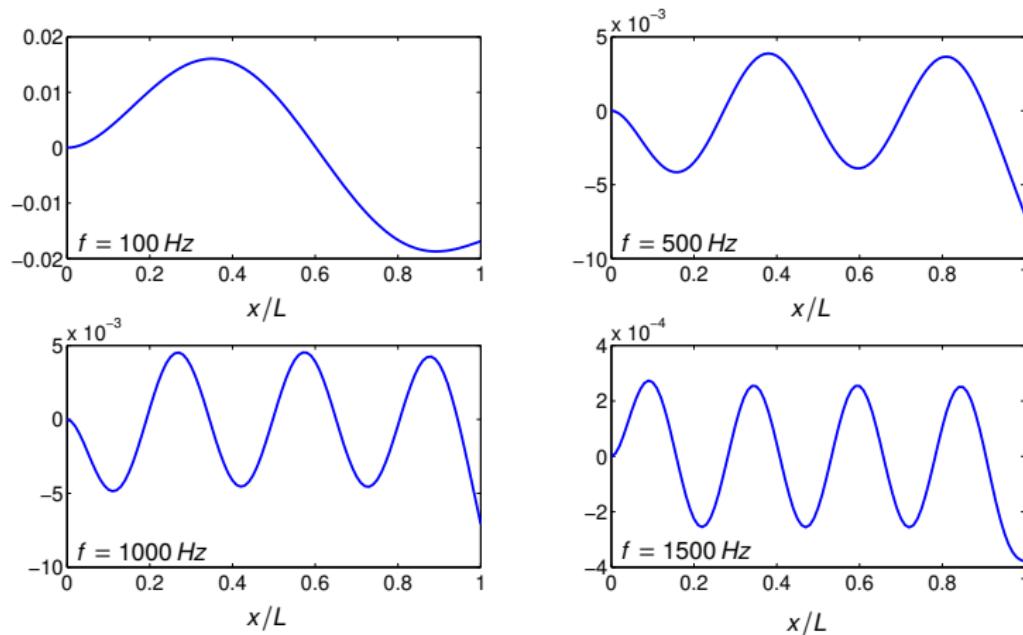


**Figure 3.11-** Évolution fréquentielle (en échelle logarithmique) du déplacement transversal (amplitude) d'une poutre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force harmonique en  $x = L$  : réponse au point d'excitation.

### Remarque

Il y a **résonance** quand la pulsation de forçage est proche d'une des pulsations propres du système libre (quand il n'a pas de d'amortissement, pulsation propres et de forçage coïncident).

## Réponse forcée harmonique - Approche « directe »



**Figure 3.12-** Évolution spatiale du déplacement ( $\text{Re}[W]$ ) d'une poutre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force en  $x = L$ .

# Principe de décomposition modale

## Proposition

Les formes propres  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  constituent une base de représentation pour décrire le comportement dynamique du système (possiblement forcé). Dans le cas où il n'existe pas de mode de corps rigide, la décomposition modale se traduit par

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) X_i(x),$$

$\phi_i = \phi_i(t)$  : **amplitudes modales.**

## Principe de troncature modale

En pratique, comme dans le cas de la barre en traction, seuls  $n$  modes  $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$  sont retenus pour décrire la décomposition modale. C'est le **principe de troncature modale**. La décomposition s'écrit alors :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(t) X_i(x)$$

# Principe de décomposition modale

## Cas des vibrations libres non amorties

- En appliquant le **principe de décomposition modale** et les **propriétés d'orthogonalité des modes**, on montre que

$$\begin{cases} \frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 & \forall i \geq 1 \\ \phi_i|_{t=0} = \phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i u_0 \, dx \quad , \quad \frac{d\phi}{dt} \Big|_{t=0} = \dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{u}_0 \, dx \end{cases}$$

- La solution de chacune des équations précédentes est connue (cf. Chap. 2) :

$$\phi_i = \phi_{i0} \cos(\Omega_i t) + \frac{\dot{\phi}_{i0}}{\Omega_i} \sin(\Omega_i t)$$

## Démonstration 3.15

On suppose un décomposition modale de type  $w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t)X_i(x)$  qui est introduite dans l'équation du mouvement sans amortissement :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\int_0^L X_r \left( EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \frac{d^4 X_i}{\partial x^4} + \rho S \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\int_0^L X_r \left( EI \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \beta_i^4 X_i + \rho S \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} X_i \right) dx = 0$$

$$\underbrace{\frac{EI}{\rho S} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i \beta_i^4}_{\begin{aligned} &= 0 \text{ si } r \neq i \\ &= m_r \text{ si } r = i \end{aligned}} \underbrace{\rho S \int_0^L X_r X_i dx + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2}}_{\begin{aligned} &= 0 \text{ si } r \neq i \\ &= m_r \text{ si } r = i \end{aligned}} \int_0^L X_r X_i dx = 0$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, les définition des masses et raideurs modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\boxed{\frac{EI}{\rho S} \beta_i^4 \phi_i + \frac{d^2 \phi_i}{\partial t^2} = 0}$$

## Démonstration 3.16

Comme  $\beta = \left( \frac{\Omega^2 \rho S}{EI} \right)^{1/4}$ , on obtient finalement :

$$\frac{d^2 \phi_i}{dt^2} + \Omega_i^2 \phi_i = 0 \quad \forall i \geq 1$$

Il faut aussi projeter les conditions initiales  $w(x, 0) = w_0$  dans la base des modes propres :

$$w_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i$$

$$\rho S \int_0^L X_r w_0 dx = \rho S \int_0^L X_r \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} X_i dx$$

$$\rho S \int_0^L X_r w_0 dx = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{i0} \rho S \int_0^L X_r X_i dx$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes et en supposant que les modes sont normalisés par rapport à la masse, on obtient :

$$\phi_{i0} = \rho S \int_0^L X_i w_0 dx$$

$$\text{et} \quad \dot{\phi}_{i0} = \rho S \int_0^L X_i \dot{w}_0 dx$$

-  Ferdinand P. BEER : *Mechanics of materials*. McGraw-Hill, New York, 6th ed édition, 2011. ISBN 978-0-07-338028-5.
-  Paolo L. GATTI : *Applied Structural and Mechanical Vibrations : Theory, Methods*. CRC Press, Taylor & Francis Group, deuxième édition, 2014.
-  M. GÉRADIN et D. RIXEN : *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, Paris, 1994.
-  James M. GERE et Barry J. GOODNO : *Mechanics of Materials*. Global Engineering, brief édition, 2012.
-  K. G. GRAFF : *Wave Motion in Elastic Solids*. London, Oxford University Press, 1991.
-  G. KELLY : *Mechanical Vibrations, Theory and Applications*. McGraw-Hill, deuxième édition, 2000.
-  G. KELLY : *Green's functions with applications*. Chapman & Hall/CRC, deuxième édition, 2015.
-  J. C PASCAL : *Vibration et acoustique*. Polycopié de cours de l'ENSIM, Le Mans, 2008.
-  Singiresu S. RAO : *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, 2nd édition, 2019.
-  S. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG et Weaver W. : *Vibration Problem in Engineering*. John Wiley and Sons, Inc., 1990.