Vibrations des structures

Absorbeurs Dynamiques Accordés (ADA)

Tuned Mass Damper (TMD)

Baptiste Bergeot

Maître de Conférences - `baptiste.bergeot@insa-cvl.fr` - bureau D03

4A INSA Centre Val de Loire

Génie des **S**ystèmes **I**ndustriels (GSI)

Année 2023/2024

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
CENTRE VAL DE LOIRE

Plan du cours

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Définitions

- Un **absorbeur dynamique accordé** (ADA) est un dispositif constitué d'une masse, d'un ressort et d'un amortisseur qui est fixé à une structure primaires (SP) afin de réduire la réponse dynamique de cette dernière.
- La **fréquence de l'absorbeur est accordée à une fréquence structurelle particulière** de sorte que lorsque cette fréquence est excitée, l'absorbeur **oscille en opposition de phase avec la structure**.
- Dans ces conditions, l'**énergie vibratoire est transférée de la structure primaire vers l'ADA où elle dissipée**.

Historique

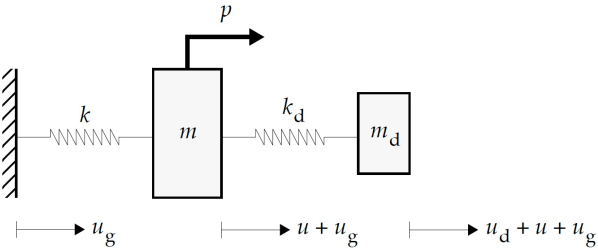
- Le concept d'ADA a été appliqué pour la première fois par Frahm en 1909 pour réduire le mouvement de roulis des bateaux ainsi que les vibrations de la coque des bateaux également.
- La théorie de l'ADA a été présentée plus tard dans l'article d'Ormondroyd & Den Hartog (1928), suivie d'une discussion détaillée sur leur optimisation paramétrique dans le livre de Den Hartog sur les vibrations mécaniques (1940).

Plan du cours

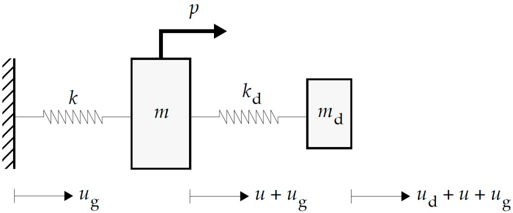
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_g.
- **ADA :** masse m_d reliée au SP par un ressort de raideur k_d.



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\begin{aligned} m_d\ddot{u}_2 + k_d\left(u_2 - u_1\right) &= 0 \\ m\ddot{u}_1 + k\left(u_1 - u_d\right) + k_d\left(u_1 - u_2\right) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} m_d\left[\ddot{u}_d + \ddot{u}\right] + k_d u_d &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + ku - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation ω : $\boxed{a_\mathrm{g} = A_\mathrm{g}\sin(\omega t)}$ et $\boxed{p = P\sin(\omega t)}$

On pose donc un solution de la forme : $\boxed{u = U\sin(\omega t)}$ et $\boxed{u_\mathrm{d} = U_\mathrm{d}\sin(\omega t)}$ que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} &\left[\omega^2 + k_\mathrm{d}\right] U_\mathrm{d} - m_\mathrm{d}\omega^2 U = -m_\mathrm{d} A_\mathrm{g} \\ &-k_\mathrm{d} U_\mathrm{d} + \left[-m\omega^2 + k\right] U = -m A_\mathrm{g} + P \end{aligned}}$$

qui est de la forme $\mathbf{D}\begin{Bmatrix} U_\mathrm{d} \\ U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ avec :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -m_\mathrm{d}\omega^2 + k_\mathrm{d} & -m_\mathrm{d}\omega^2 \\ -k_\mathrm{d} & -m\omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_\mathrm{d} A_\mathrm{g} \quad \text{et} \quad F_2 = -m A_\mathrm{g} + P.$$

Solution

La solution du système précédent est :

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{P}{k}\left(\frac{1-\rho_{\mathrm{d}}^2}{D_1}\right) - \frac{mA_{\mathrm{g}}}{k}\left(\frac{1+\bar{m}-\rho_{\mathrm{d}}^2}{D_1}\right) \\ \hat{u}_{\mathrm{d}} &= \frac{P}{k_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\bar{m}\rho^2}{D_1}\right) - \frac{mA_{\mathrm{g}}}{k_{\mathrm{d}}}\left(\frac{\bar{m}}{D_1}\right) \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{D_1 = \left[1-\rho^2\right]\left[1-\rho_{\mathrm{d}}^2\right] - \bar{m}\rho^2}, \quad \boxed{\rho = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{\omega}{\sqrt{k/m}}}, \quad \boxed{\rho_{\mathrm{d}} = \frac{\omega}{\Omega_{\mathrm{d}}} = \frac{\omega}{\sqrt{k_{\mathrm{d}}/m_{\mathrm{d}}}}}$$

et $\boxed{\bar{m} = \frac{m_{\mathrm{d}}}{m}}$ le rapport des masse entre le SP et ADA.

Remarque

- **Sans ADA** résonance pour $\boxed{\omega = \Omega}$
- **Avec ADA** résonance si $\boxed{D_1 = 0}$

Optimisation de l'ADA

En sélectionnant $\bar{m}$ et ρ_d tels que $\boxed{1+\bar{m}-\rho_\mathrm{d}^2=0}$ on montre que U et U_d :

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{P}{k} \\ U_\mathrm{d} &= -\frac{P}{k_\mathrm{d}}\rho^2 + \frac{mA_\mathrm{g}}{k_\mathrm{d}} \end{aligned}}$$

Ce choix :

- **isole le mouvement relatif du SP du mouvement du support** et **réduit la réponse due à la force externe à la valeur pseudo-statique** $\frac{P}{k}$. Une plage typique pour $\bar{m}$ est de 0.01 à 0.1.
- **élimine la résonance**.

Les **paramètres optimaux de l'ADA** sont donc :

$$\boxed{\Omega_\mathrm{d}|_\mathrm{opt} = \frac{\omega}{\sqrt{1+\bar{m}}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k_\mathrm{d}|_\mathrm{opt} = \left[\Omega_\mathrm{d}|_\mathrm{opt}\right]^2 m_\mathrm{d} = \frac{\omega^2 m\bar{m}}{1+\bar{m}}}$$

Optimisation de l'ADA

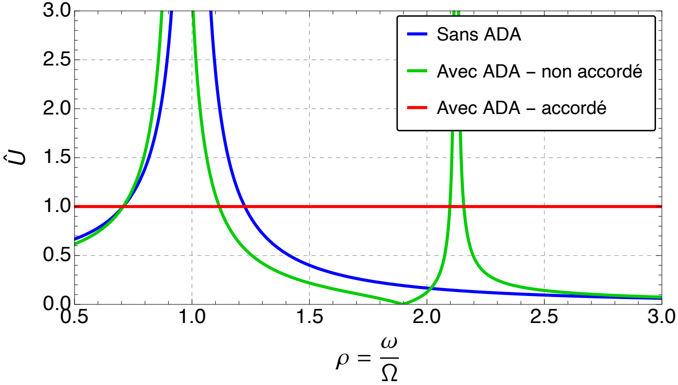
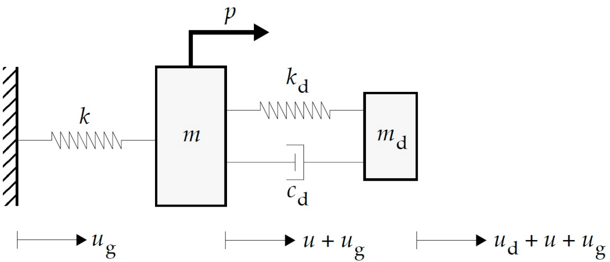


Figure - Evolution fréquentielle du déplacement U du SP pour $m = 1$, $k = 1$, $k_\mathrm{d} = 1$, $P = 1$, $\hat{a}_\mathrm{g} = 0.5$ et $\bar{m} = 0.1$

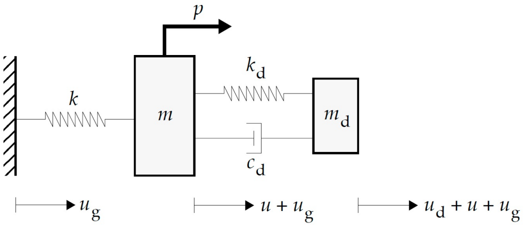
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_g.
- **ADA :** masse m_d reliée au SP par un ressort de raideur k_d et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_d .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On considère des excitations périodique de pulsation ω : $\boxed{a_\mathrm{g} = A_\mathrm{g}\sin(\omega t)}$ et $\boxed{p = P\sin(\omega t)}$

Comme il y a de l'amortissement, on pose un solution complexe de la forme :

$$\boxed{\hat{u} = \hat{U}e^{j\omega t}}, \quad \boxed{\hat{u}_\mathrm{d} = \hat{U}_\mathrm{d}e^{j\omega t}}, \quad \boxed{\hat{a}_\mathrm{g} = A_g e^{j\omega t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\hat{p} = Pe^{j\omega t}}$$

(il faudra prendre la partie imaginaire à la fin) que l'on introduit dans les équations du mouvement :

$$\boxed{\begin{aligned} \left[-m_\mathrm{d}\omega^2 + jc_\mathrm{d}\omega + k_\mathrm{d}\right]\hat{U}_\mathrm{d} - m_\mathrm{d}\omega^2\hat{U} &= -m_\mathrm{d}A_\mathrm{g} \\ -\left[jc_\mathrm{d}\omega + k_\mathrm{d}\right]\hat{U}_\mathrm{d} + \left[-m\omega^2 + k\right]\hat{U} &= -mA_\mathrm{g} + P \end{aligned}}$$

qui est de la forme $\mathbf{D}\begin{Bmatrix}\hat{U}_\mathrm{d}\\ \hat{U}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix}$ avec :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -m_\mathrm{d}\omega^2 + jc_\mathrm{d}\omega + k_\mathrm{d} & -m_\mathrm{d}\omega^2 \\ -\left[jc_\mathrm{d}\omega + k_\mathrm{d}\right] & -m\omega^2 + k \end{bmatrix}, \quad F_1 = m_\mathrm{d}A_\mathrm{g} \quad \text{et} \quad F_2 = -mA_\mathrm{g} + P.$$

Solution

La solution du système précédent est donc $\begin{Bmatrix} \hat{U}_\mathrm{d} \\ \hat{U} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$ soit :

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{P}{kD_2}\left[f^2 - \rho^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f\right] - \frac{A_\mathrm{g} m}{kD_2}\left[(1+\bar{m})f^2 - \rho^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f(1+\bar{m})\right] \\ \hat{U}_\mathrm{d} &= \frac{P\rho^2}{kD_2} - \frac{A_\mathrm{g} m}{kD_2} \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{\xi_\mathrm{d} = c_\mathrm{d}/(2\Omega_\mathrm{d} m_\mathrm{d})}$$

$$\boxed{D_2 = \left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right] - \bar{m}\rho^2 f^2 + j2\xi_\mathrm{d}\rho f\left[1-\rho^2(1+\bar{m})\right]} \quad \text{et} \quad \boxed{f = \frac{\Omega_\mathrm{d}}{\Omega}}$$

Remarque

- **Sans ADA** résonance pour $\boxed{\omega = \Omega}$
- **Avec ADA** résonance si $\boxed{|D_2| = |D_2|_{\mathrm{min}}}$

Solution

Les expressions précédentes sont exprimées sous forme polaire :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{U} &= \frac{P}{k} H_1 e^{j\delta_1} - \frac{A_g m}{k} H_2 e^{j\delta_2} \\ \hat{U}_d &= \frac{P}{k} H_3 e^{-j\delta_3} - \frac{A_g m}{k} H_4 e^{-j\delta_4}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_1 = \frac{\sqrt{\left[f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_d \rho f\right]^2}}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_2 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m})f^2 - \rho^2\right]^2 + \left[2\xi_d \rho f(1+\bar{m})\right]^2}}{|D_2|}}$$

$$\boxed{H_3 = \frac{\rho^2}{|D_2|}} \quad ; \quad \boxed{H_4 = \frac{1}{|D_2|}}$$

$$\boxed{|D_2| = \sqrt{\left(\left[1-\rho^2\right]\left[f^2-\rho^2\right] - \bar{m}\rho^2 f^2\right)^2 + \left(2\xi_d \rho f\left[1-\rho^2(1+\bar{m})\right]\right)^2}}$$

Remarque

Dans la plupart des application on a $\bar{m} \approx 0.05 \ll 1$, par conséquent $\boxed{H_1 \approx H_2}$

Solution

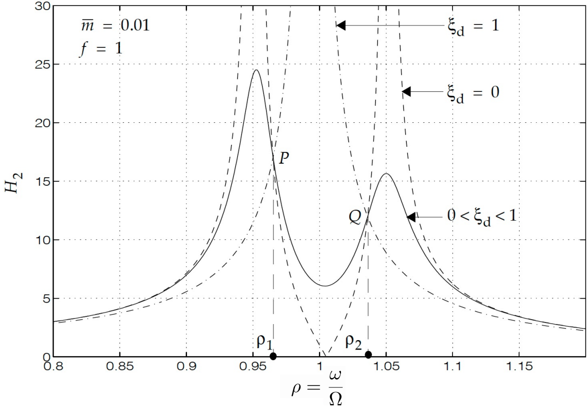


Figure - H_2 en fonction de ρ.

- On passe de 1 pic pour $\xi_d = 1$ à deux pic $\xi_d = 0 \Rightarrow$ **Optimal entre les deux**
- Toutes les courbe passent par les points P et $Q \Rightarrow$ **Position indépendante de ξ_d**

Optimisation de l'ADA

Position de P et Q

On écrit H_2 sous la forme suivante :

$$H_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \xi_d^2 a_2^2}{a_3^2 + \xi_d^2 a_4^2}} = \frac{a_2}{a_4}\sqrt{\frac{a_1^2/a_2^2 + \xi_d^2}{a_3^2/a_4^2 + \xi_d^2}}$$

qui devient indépendant de ξ_d si $\boxed{|a_1/a_2| = |a_3/a_4|}$, dans ce cas : $\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{a_2}{a_4}}$

En remplaçant les expressions de a dans $|a_1/a_2| = |a_3/a_4|$ on obtient une équation du 2nd degré en ρ^2 :

$$\boxed{\rho^4 - \left[(1+\bar{m})f^2 + \frac{1+0.5\bar{m}}{1+\bar{m}}\right]\rho^2 + f^2 = 0}$$

dont les deux racines positive sont notées ρ_1 et ρ_2. On a donc finalement :

$$\boxed{H_2|_{P,Q} = \frac{1+\bar{m}}{\left|1-\rho_{1,2}^2(1+\bar{m})\right|}}$$

Optimisation de l'ADA

Stratégie d'optimisation

On souhaite **minimiser** H_2, pour cela on va :

1. égaliser les deux valeur de $H_2|_{P,Q}$, ceci équivaut à :

$$|1 - \rho_1^2(1 + \bar{m})| = |1 - \rho_2^2(1 + \bar{m})|$$

   qui conduit à (après quelques étapes de calcul) :

$$\boxed{f_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{1 - 0.5\bar{m}}}{1 + \bar{m}}} \; ; \; \boxed{\Omega_{\text{d}}|_{\text{opt}} = f_{\text{opt}}\Omega} \Rightarrow \boxed{\rho_{1,2}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{0.5\bar{m}}}{1 + \bar{m}}}} \; ; \; \boxed{H_2|_{\text{opt}} = \frac{1 + \bar{m}}{\sqrt{0.5\bar{m}}}}$$

2. augmenter la valeur de ξ_{d} jusqu'à ce que les pics (maximum de H_2) coincident avec les points P et Q, on obtient :

$$\boxed{\xi_{\text{d}}|_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\bar{m}(3 - \sqrt{0.5\bar{m}})}{8(1 + \bar{m})(1 - 0.5\bar{m})}}}$$

$\Rightarrow$ **Cet état correspond aux performances optimales de l'ADA**

Optimisation de l'ADA

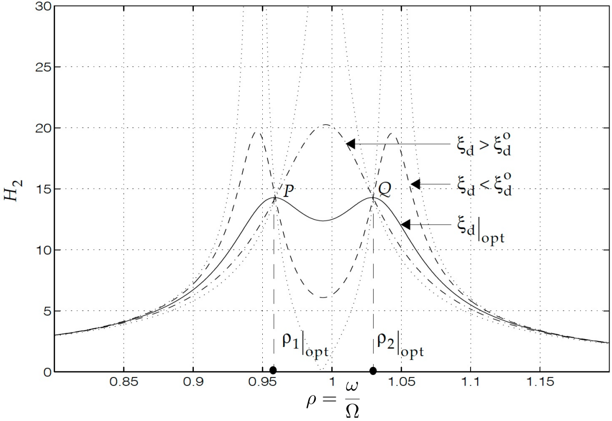
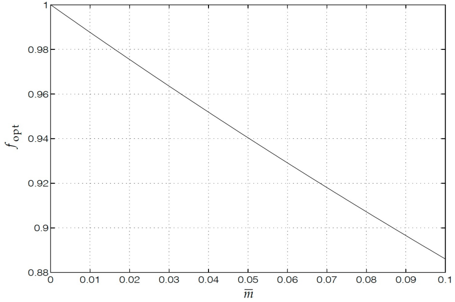
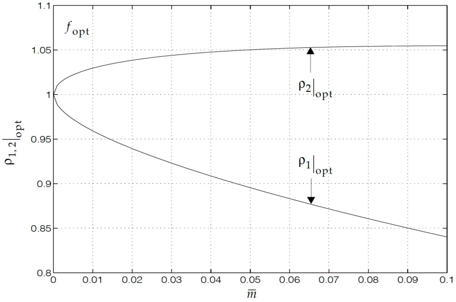


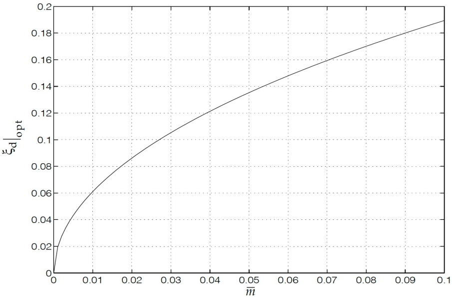
Figure - H_2 en fonction de ρ.

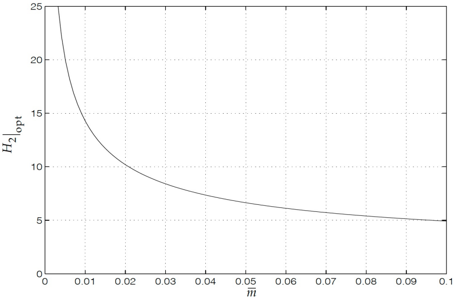
Optimisation de l'ADA





Optimisation de l'ADA

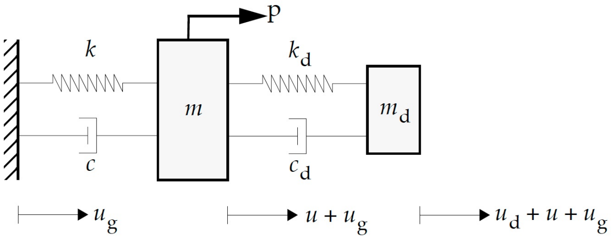




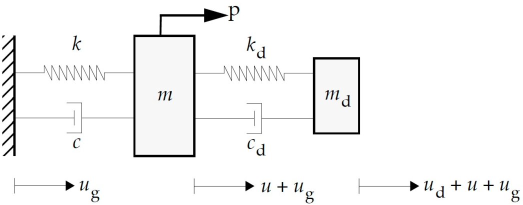
Plan du cours

Système étudié

- **SP :** masse m relié au support par un ressort de raideur k et un amortisseur de coefficient d'amortissement c et soumise une excitation par force imposée p et par mouvement du support d'accélération a_{g}.
- **ADA :** masse m_{d} reliée au SP par un ressort de raideur k_{d} et un amortisseur de coefficient d'amortissement c_{d} .



Équations du mouvement



- $\boxed{u_g}$: déplacement du support. On a donc $\ddot{u}_g = a_g$
- $\boxed{u_1}$: déplacement absolu de la masse m (SP). On pose $\boxed{u = u_1 - u_g}$ son déplacement relatif par rapport au support et donc $\boxed{u_1 = u + u_g}$
- $\boxed{u_2}$: déplacement absolu de m_d (ADA). On pose $\boxed{u_d = u_2 - u_1}$ son déplacement relatif par rapport au SP et donc $\boxed{u_2 = u_d + u + u_g}$

Équations du mouvement

$$\boxed{\begin{aligned} m_d\ddot{u}_d + c_d\dot{u}_d + k_d u_d + m_d\ddot{u} &= -m_d a_g \\ m\ddot{u} + c\dot{u} + ku - c_d\dot{u}_d - k_d u_d &= -m a_g + p \end{aligned}}$$

Solution

On procédant comme précédemment on arrive à :

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{U} &= \frac{P}{k}H_5 e^{j\delta_5} - \frac{A_g m}{k}H_6 e^{j\delta_6}\\ \hat{U}_d &= \frac{P}{k}H_7 e^{-j\delta_7} - \frac{A_g m}{k}H_8 e^{-j\delta_8}\end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{H_4 = \frac{\sqrt{\left[f^2-\rho^2\right]^2 + \left[2\xi_d \rho f\right]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_6 = \frac{\sqrt{\left[(1+\bar{m})f^2-\rho^2\right]^2 + \left[2\xi_d \rho f(1+\bar{m})\right]^2}}{|D_3|}}$$

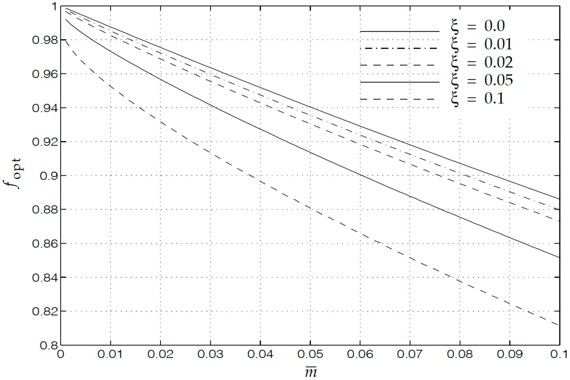
$$\boxed{H_7 = \frac{\rho^2}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{H_8 = \frac{\sqrt{1+\left[2\xi\rho\right]^2}}{|D_3|}} \quad ; \quad \boxed{\xi = c/(2\Omega m)} \quad ; \quad \boxed{\xi_d = c/(2\Omega_d m)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|D_3| = &\left[-f^2\rho^2\bar{m} + \left(1-\rho^2\right)\left(f^2-\rho^2\right) - 4\xi\,\xi_d f\rho^2\right]^2\\ &+4\left[\xi\rho\left(f^2-\rho^2\right) + \xi_d f\rho\left(1-\rho^2(1+\bar{m})\right)^2\right]\end{aligned}}$$

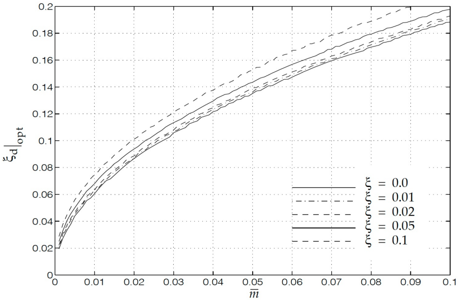
Optimisation de l'ADA

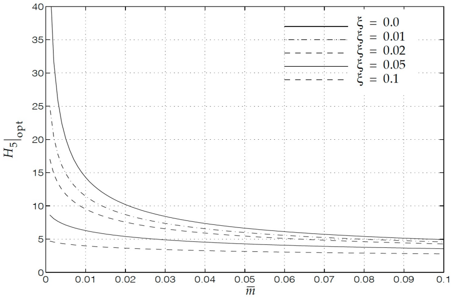
Stratégie d'optimisation

Le même que pour **SP non amortie - ADA amorti** mais pas de résultat analytique.
$\Rightarrow$ Les différentes équations sont résolues numériquement.



Optimisation de l'ADA





Plan du cours

Ce document à été rédigé à l'aide de l'ouvrage suivant :

- Jerome J. Connor, *Introduction to Structural Motion Control*, 2002, Prentice Hall (ISBN 0130091383), Chapitre 4